



Transition vers le chaos en convection naturelle confinée : descriptions lagrangienne et eulérienne

Ludomir Oteski

► To cite this version:

Ludomir Oteski. Transition vers le chaos en convection naturelle confinée : descriptions lagrangienne et eulérienne. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2015. Français. <NNT : 2015PA112084>. <tel-01221970>

HAL Id: tel-01221970

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01221970>

Submitted on 29 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ECOLE DOCTORALE MIPEGE
LABORATOIRE LIMSI-CNRS

DISCIPLINE : PHYSIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue le 30 juin 2015 par

Ludomir Oteski

Transition vers le chaos
en convection naturelle confinée :
descriptions lagrangienne et eulérienne

Directeur de thèse : M. Patrick Le Quéré

Directeur de Recherche CNRS (École Polytechnique, Palaiseau)

Co-directeur de thèse : M. Yohann Duguet

Chargé de Recherche CNRS (LIMSI-CNRS, Orsay)

Co-directeur de thèse : M. Luc Pastur

Maître de Conférences Université Paris Sud (LIMSI-CNRS, Orsay)

Composition du jury :

Président du jury : Mme. Isabel Mercader Calvo

Professeur de l'Universitat Politècnica de Catalunya (Dep. Física Aplicada, Barcelona, Spain)

Rapporteurs : Mme. Laurette S. Tuckerman

Directeur de Recherche CNRS (ESPCI-PMMH, Paris)

M. Daniel Henry

Directeur de Recherche CNRS (LMFA, Lyon)

Examineurs : Mme. Claudine Dang Vu-Delcarte

Professeur Émérite Université Paris Sud (LIMSI-CNRS, Orsay)

0.1 Résumé

Transition vers le chaos en convection naturelle confinée : descriptions lagrangienne et eulérienne

Cette thèse est une étude numérique d'un écoulement d'air dans une cavité différentiellement chauffée bidimensionnelle en présence de gravité. Pour un rapport hauteur/largeur de deux et des parois horizontales supposées adiabatiques, l'écoulement de base correspond à une recirculation autour de la cavité avec un coeur stratifié et des couches limites verticales. Les équations de Navier-Stokes sont résolues par un code de simulation numérique directe spectrale instationnaire basé sur l'hypothèse de Boussinesq couplé à un algorithme de suivi de particules avec interpolation. Le nombre de Rayleigh basé sur la différence de température est choisi comme paramètre de contrôle de l'écoulement. La transition vers le chaos au sein de cet écoulement est explorée à la fois du point de vue eulérien (développement de l'instationnarité) et lagrangien (mélange chaotique).

L'approche lagrangienne considère le mélange de traceurs passifs infinitésimaux non diffusifs. L'étude se base sur l'identification d'objets invariants de la dynamique : points fixes, orbites périodiques et leurs variétés stable/instable, connections homoclines et hétéroclines, trajectoires toroïdales. Le mélange des traceurs est partiel lorsque l'écoulement subit une première bifurcation de Hopf. La dispersion globale des traceurs résulte d'un compromis entre la présence de tores Kolmogorov-Arnold-Moser qui jouent le rôle de barrières au mélange, et d'enchevêtrements homoclines/hétéroclines responsables du chaos lagrangien. L'étude statistique des temps de retour et du taux d'homogénéisation révèle la présence de zones où la dynamique est non hyperbolique. En augmentant le nombre de Rayleigh, le mélange devient progressivement complet avant que l'écoulement ne devienne quasi-périodique en temps.

L'approche eulérienne considère les divers scénarios de transition vers le chaos par l'identification numérique d'attracteurs et des bifurcations associées lorsque le nombre de Rayleigh varie. Deux routes principales se distinguent en fonction des symétries associées aux deux premières bifurcations de Hopf du système, contenant chacune plusieurs branches hystérétiques. Trente trois régimes différents sont identifiés et analysés depuis l'écoulement stationnaire jusqu'à un écoulement chaotique voire hyperchaotique. Parmi ceux-ci, des branches de tores à deux et trois fréquences incommensurables, ainsi que des régimes intermittents sont examinés. Des diagrammes de bifurcations qualitatifs et quantitatifs sont proposés pour résumer l'ensemble des dynamiques observées.

Transition to chaos in confined natural convection : Lagrangian and Eulerian descriptions

This report is about the numerical study of an air flow inside a two dimensionally heated cavity. The aspect ratio height/width is set to two. Boundary conditions on horizontal walls are taken as adiabatic. In this case, the base flow consists of a recirculation around the stratified core of the cavity and of boundary layers along the vertical walls. The Navier-Stokes equations are solved using a spectral direct numerical simulation code under the Boussinesq assumption coupled with a particle tracking scheme based on interpolation. The Rayleigh number, based on the temperature difference is chosen as the control parameter of the system. The transition to chaos in this flow is considered both from the Eulerian and Lagrangian point of view.

The Lagrangian point of view considers the mixing of point-wise non-diffusive passive tracers. The study is based on the identification of invariant objects : fixed points, periodic orbits and their stable/unstable manifolds, homoclinic and heteroclinic connections, toroidal trajectories. The mixing of tracers is partial when the flow undergoes the first Hopf bifurcation. The complete mixing of tracers results from a compromise between Kolmogorov-Arnold-Moser's tori, which act as barriers to mixing, and homoclinic/heteroclinic tangles which are responsible for the mixing. The statistical study of return times and the homogenisation rate shows regions where the dynamics is non-hyperbolic. When the Rayleigh number is increased, mixing is increasingly complete before the flow becomes quasi-periodic in time.

The Eulerian description considers the transition to chaos via the numerical identification of attractors and their associated bifurcations when the Rayleigh number is varied. Two main routes are found depending on the symmetries associated with the first two Hopf bifurcations of the system. A total of thirty three different regimes are identified from steady to hyperchaotic, among which two- and three-frequency tori as well as intermittent dynamics. Both quantitative and qualitative bifurcation diagrams are suggested for the system.

0.2 Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Yohann Duguet, Luc Pastur et Patrick Le Quéré pour l'encadrement formidable dont ils ont su faire preuve durant ces années de thèse, ainsi que la fondation *Airbus Group* sans qui ce projet n'aurait pas été possible. Je remercie également Claudine Dang-Vu Delcarte, Isabel Mercader Calvo, Laurette Tuckerman et Daniel Henry pour avoir accepté de faire partie de mon jury, ainsi que Shihe Xin pour m'avoir fourni le code utilisé pour résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes.

Je tiens à remercier mes collègues de bureau actuels : Shreyas Acharya, Loïc Cappanera, Andres Castillo, Marko Pavlov, Elie Saikali, Can Selçuk et passés : Christelle Douay, Huong-Lan Tran, Jérémie Basley, Franky Luddens, Charles Garnier, Lin Ma, Guillaume Prigent et Zhenlan Gao pour leur bonne humeur et les nombreuses discussions que nous avons eues ensemble. Je tiens également à remercier Olivier Lassalle, Jalel Chergui et Yann Fraigneau pour le temps qu'ils ont consacré à répondre à mes diverses demandes d'ordre informatique et numérique, ainsi que l'ensemble du groupe CORO/ETCM.

Je tiens également à remercier Emmanuelle Tsigaridis, que j'ai eu le plaisir d'encadrer lors de son stage de licence. Je remercie plus généralement l'ensemble du personnel du LIMSIS qui contribue à faire de ce laboratoire un lieu plaisant et accueillant.

Je tiens à remercier ma femme Elise Basso-Blandin ainsi que ma famille : Marie-Madeleine, Orianne, Maciej et Stanislas Oteski, ma belle-famille : Anne-Marie Blandin, Brigitte Blandin, Francis Basso et Adrien Basso-Blandin, mes proches : Camille Denozière, Estelle Deguillard, Walter Yvart, Alexis et Andréas Odorico et Thomas Verbeke.

Je remercie par ailleurs Peder Axensten pour son magnifique script matlab, *savefig*, qui permet, entre autre, de réaliser des sauvegardes d'image haute résolution et que je recommande vivement à tous ceux appelés à utiliser ce logiciel.

Je tiens finalement à vous remercier vous, lecteur, et j'espère que vous trouverez dans ce mémoire des informations utiles pour la suite de vos travaux.

Sommaire

0.1	Résumé	i
0.2	Remerciements	iii
1	Contexte de l'étude	1
2	L'écoulement de cavité différentiellement chauffée bidimensionnelle	3
2.1	Présentation de l'écoulement	4
2.1.1	Formulation mathématique	6
2.1.2	Analyse en ordres de grandeur de l'écoulement	7
2.1.3	Adimensionnement des équations	9
2.2	Symétries de l'écoulement	11
2.3	Observables	12
2.4	Suivi des branches centro-symétriques	13
2.5	Nomenclature des dynamiques toroïdales	14
2.6	Protocole d'exploration	14
2.7	Dynamiques connues	14
2.8	Conclusion	19
3	Route vers le chaos lagrangien	23
3.1	Introduction	23
3.2	Points fixes des écoulements bidimensionnels stationnaires	24
3.3	Points périodiques des écoulements $2D$, incompressibles et périodiques en temps	25
3.3.1	Indication de la présence d'orbites périodiques	26
3.3.2	Algorithmes d'identification de points périodiques	26
3.4	Mélange dans les écoulements bidimensionnels incompressibles	28
3.5	Méthodes numériques pour l'étude lagrangienne	30
3.6	Résultats (article scientifique)	31
3.7	Conclusion et perspectives	63
4	Route vers le chaos eulérien	67
4.1	Dynamiques non centro-symétriques issues de T^2	68
4.2	Dynamiques centro-symétriques issues de T_C^2	73
4.3	Dynamiques proches du sous-espace centro-symétrique	80
4.4	Au delà de $Ra = 2.9 \times 10^8$	85
4.4.1	Dynamiques non centro-symétriques quasipériodiques	86
4.4.2	Dynamiques chaotiques non centro-symétriques	88
4.4.3	Dynamiques centro-symétriques	88
4.4.4	Fenêtres de périodicité	88
4.4.5	Hyperchaos	94
4.5	Diagrammes de bifurcations	99
4.6	Conclusions et perspectives	107
5	Conclusion générale	111

Bibliographie	117
A Annexes partie Eulérienne	119
A.1 Méthodes numériques	119
A.1.1 Discrétisation temporelle	119
A.1.2 Discrétisation spatiale	119
A.2 Calcul des exposants de Lyapunov	120
A.2.1 Étalonnage : cas du système de Lorenz	121
A.2.2 Algorithme de calcul	121
A.2.3 Linéarisation des équations de Navier-Stokes	123
A.2.4 Initialisation et renormalisation	123
A.2.5 Exposants nuls	126
A.2.6 Convergence des estimations d'exposants non nuls	126
A.2.7 Les exposants de Lyapunov pour l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$	128
A.3 Pulsation dominante (ω_e)	128
A.4 Filtrage fréquentiel	128
A.5 Calcul des corrélations	131
A.5.1 Définition et calcul	134
A.5.2 Étalonnage	134
A.6 Convergence en maillage	134
B Annexes partie Lagrangienne	139
B.1 Section stroboscopique	139
B.2 Aspects numériques	139
B.2.1 Schéma temporel	139
B.2.2 Interpolations	143
B.2.3 Algorithmes d'identification de points fixes/périodiques	145

Table des figures

2.1	Schéma de la cavité différentiellement chauffée	4
2.2	Points de bifurcations de l'écoulement tridimensionnel	6
2.3	Évolution de l'énergie cinétique $E_k = f(Ra)$	10
2.4	Schéma de la cavité différentiellement chauffée $2D$ adimensionnée	11
2.5	Schéma des solutions centro et non centro-symétriques Ra entre 0 et 2.1×10^8 . .	15
2.6	Évolution de l'état stationnaire du système en fonction de Ra	15
2.7	Profil de température $\Theta(X = 0.25, Z)$ à $Ra = 10^8$	16
2.8	Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation ω_e pour les dynamiques T^1 et T_C^1	17
2.9	Régime périodique T^1	17
2.10	Régime périodique T_C^1	18
2.11	Schéma du diagramme de bifurcations séparant les régimes T^0 , T^1 et T_C^1	19
2.12	Valeurs des premiers points de bifurcation en fonction de Ra et de Pr	20
2.13	Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation ω_p pour la dynamique T_C^2	20
2.14	Régime quasi-périodique T_C^2	21
3.1	Orbites homoclines et hétéroclines de points fixes hyperboliques	25
3.2	Exemple de deux orbites périodiques instables de l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$	27
3.3	Graphes et carte de récurrences à t_0 et τ variables	28
3.4	Cartes de récurrences à t_0 fixe	29
3.5	Schéma d'une zone de mélange confinée et orbite périodique instable correspondante dans l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$	30
3.6	Illustration du mélange local pour plusieurs orbites périodiques instables	31
3.7	Points fixes de l'écoulement stationnaire instable et connections homoclines et hétéroclines existantes	65
4.1	Schéma des dynamiques non centro-symétriques : T^2 , T_A^2 , T_A^3 et C_A	68
4.2	Régimes quasi-périodiques T^2 et T_A^2	69
4.3	Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation ω_p pour les dynamiques T^2 , T_{A+}^2 et T_{A-}^2	70
4.4	Régime quasi-périodique T_A^3	71
4.5	Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation ω_{TBF} du régime T_A^3	71
4.6	Chaos C_A	72
4.7	Schéma des branches centro-symétriques : T_C^2 , T_{C2}^3 , T_{C2}^2 , T_{C3}^2 , T_X^2 et C_X	73
4.8	Régimes quasi-périodiques T_{C2}^3 et T_{C2}^2	75
4.9	Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation ω_e du régime T_X^2	76
4.10	Régime quasi-périodique T_X^2	76
4.11	Accrochage T_X^1	77
4.12	Schéma générique d'une bifurcation nœud-col dans une application de premier-retour	77

4.13	Régimes quasi-périodiques T_{C3}^2 et T_{C3}^1	78
4.14	Chaos C_X	79
4.15	Schéma des dynamiques proches du sous-espace CS pour Ra entre 2.55×10^8 et 2.67×10^8	80
4.16	Correspondances entre les intermittences Int_X et Int_{C2} et les dynamiques T_X^2 et T_{C2}^2	82
4.17	Régimes intermittents Int_X et Int_{C2}	83
4.18	Comparaisons entre les dynamiques T_S^1 et T_X^1	83
4.19	Schéma de bifurcation des régimes T_H^2	83
4.20	Régime quasi-périodique T_H^2	84
4.21	Comparaisons entre T_H^2 et T_C^2	84
4.22	Schéma des régimes NCS $T_H^3, T_{A2}^3, C_{A2}, T_P^2, T_P^3, H_H, T_K^2, H$ et CS T_F^2, C_F, T_L^1 et H_C	85
4.23	Régime quasi-périodique T_{A2}^3	86
4.24	Régime quasi-périodique T_H^3	87
4.25	Régime quasi-périodique T_P^2	89
4.26	Régime quasi-périodique T_P^3	90
4.27	Chaos C_{A2}	90
4.28	Hyperchaos H_H	91
4.29	Régime quasi-périodique T_F^2	91
4.30	Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation ω_e du régime T_F^2	92
4.31	Chaos C_F	92
4.32	Régime quasi-périodique T_L^1	93
4.33	Chaos C_L	94
4.34	Diagramme de bifurcation des dynamiques T_L^1	95
4.35	Régime quasi-périodique T_K^1	96
4.36	Hyperchaos H_C	97
4.37	Hyperchaos H	98
4.38	Diagramme de bifurcation schématique complet	99
4.39	Diagrammes de bifurcation en représentation (Ra, ω)	101
4.40	Diagrammes de bifurcation en fonction des symétries du système	102
4.41	Diagramme de bifurcations en fonction de S	103
4.42	Schéma des bifurcations (supposées) pour Ra entre 2.6×10^8 et 3.09×10^8	104
4.43	Diagrammes de bifurcations des fluctuations d'énergies	105
4.44	Diagrammes de bifurcations des écarts ΔE_k et ΔE_Θ	106
A.1	Schéma de la déformation d'un parallélogramme défini suivant les axes propres d'une dynamique	121
A.2	Schéma de la renormalisation associée à la trajectoire perturbée	125
A.3	Étalonnage des exposants de Lyapunov pour l'écoulement de cavité $2D$	127
A.4	Spectre en puissance des dynamiques T^1, T_{C3}^2, T_{A2}^3 et T_L^1	131
A.5	Illustration de l'algorithme d'identification de la pulsation ω_e	132
A.6	Les différentes étapes du procédé de filtrage en pulsation pour représenter la structure spatiale du champ de température associé à une pulsation ω choisie	133
A.7	Étalonnage de la méthode de Ketzmerick <i>et al.</i> [38]	135
A.8	Valeur du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de la discrétisation spatiale	137
B.1	Section stroboscopique lagrangienne	140
B.2	Champ de vitesse d'un réseau périodique de tourbillons bidimensionnels	142
B.3	Comparaison de l'erreur commise entre les schémas numériques d'Euler, Runge-Kutta implicite d'ordre 2 et Runge-Kutta explicite d'ordre 4	143
B.4	Schéma des différentes étapes pour l'interpolation $2D$	145
B.5	Précision du schéma numérique pour le suivi de traceurs passifs	146
B.6	Convergence de l'algorithme de dichotomie $2D$ sur un point fixe de l'écoulement de cavité différentiellement chauffée stationnaire	148

Liste des tableaux

2.3	Grandeurs de références pour l'adimensionnement des équations	10
4.1	Plage des régimes T_H^2	81
A.1	Exposants de Lyapunov pour le système de Lorenz avec $\beta = 4$, $\sigma = 16$, $\rho = 45.92$.	124
A.2	Exposants de Lyapunov dans le cas du système de Lorenz pour $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$	125
A.3	Estimation des premiers exposants de Lyapunov pour l'écoulement	129
A.4	Pulsation dominante de chacune des dynamiques identifiées	130
A.5	Étalonnage de la méthode de Ketzmerick <i>et al.</i>	134
A.6	Évaluation de l'exposant de Lyapunov le plus instable pour la dynamique chaotique HC pour différentes discrétisations spatiales	136

Contexte de l'étude

Comment mélanger, quantifier et caractériser le mélange dans un milieu fluide ? Dans le contexte écologique et industriel le mélange joue un rôle primordial dans de nombreuses applications.

Du point de vue écologique, de nombreuses études sur la capacité d'un écosystème à mélanger des polluants ont été conduites, par exemple dans le cas de l'impact de la pollution sur la biodiversité dans les lacs [34]. Certaines catastrophes telles que les marées noires ont également permis une meilleure compréhension des zones favorisant ou non la dispersion de polluants dans le Golfe du Mexique [10]. Le mélange trouve également des applications dans la purification des eaux, par la création d'installations favorisant la dispersion de polluants urbains dans des milieux où les échanges sont difficiles [56].

Du point de vue industriel, les applications sont nombreuses dans l'ajout d'additifs alimentaires, la fabrication d'alliages, ... D'autres produits nécessitant une homogénéité la plus parfaite possible sont les médicaments, dont les normes exigent que les produits pharmaceutiques respectent scrupuleusement une concentration donnée de principe actif quelque soit le point de mesure [18]. D'autres applications, à plus ou moins grande échelle, interviennent dans le quotidien, en micro-fluidique [71], dans les systèmes de refroidissements où les échanges thermiques entre le milieu chaud et froid doivent être favorisés, ... Le suivi de particules est un outil très utilisé en hydrodynamique afin d'obtenir une idée de la topologie d'un écoulement [60], [74]. Il est souvent réalisé par l'ajout de colorants de même densité que le fluide étudié.

Nous avons choisi dans cette étude de qualifier et quantifier le mélange dans un écoulement de convection naturelle en milieu confiné. Le gradient thermique auquel est soumis le fluide modifie localement sa densité et la poussée d'Archimède devient responsable du mouvement. De nombreux systèmes obéissent à cette description, et sont présents à toutes les échelles. Par exemple dans le cas de la météorologie où la différence de température entre le sol et les différentes couches atmosphériques est une des causes du vent. La convection naturelle intervient également dans l'écoulement présent dans le manteau terrestre, et de façon générale dans tout astre possédant une atmosphère ou présentant une activité interne. À l'échelle humaine, nous retrouvons des applications d'écoulement de convection naturelle dans des domaines aussi vastes et variés que le nucléaire, l'isolation des bâtiments, la cuisson, ... ou, en généralisant, dans tout système fluide présentant un gradient thermique.

Nous considérons ici une enceinte dont l'une des parois est plus chaude que sa paroi opposée. La poussée d'Archimède due aux modifications de densité que subit le fluide devient alors responsable de l'écoulement contenu dans l'enceinte : le long de la paroi chaude, le fluide voit sa densité diminuer et monte alors que le long de la paroi froide sa densité augmente et il coule. L'orientation du gradient thermique imposé par rapport au champ de gravité détermine donc fortement la topologie de l'écoulement observé.

Nous nous intéressons ici au cas où la gravité est orthogonale au gradient thermique imposé. Cette configuration porte le nom générique de cavité différentiellement chauffée et peut être observée dans des systèmes comme les doubles vitrages, par exemple. À gradient thermique non nul, le

choix de cette configuration met nécessairement le fluide placé dans la cavité en mouvement. En plus de son aspect applicatif, le choix de cet écoulement a été motivé par deux facteurs. Le premier d'entre eux est la quantité d'études dont il a fait l'objet. Cet écoulement s'inscrit comme cas de référence et les premières transitions du système vers l'instationnarité sont très bien connues. La seconde raison est que cet écoulement fait partie des écoulements traditionnellement étudiés au LIMS. L'expertise acquise au laboratoire rend le dialogue sur les résultats beaucoup plus rapide et accessible. Nous traitons numériquement le cas d'une cavité différentiellement chauffée idéalisée dans le cadre d'une approximation bidimensionnelle.

Pour cet écoulement, notre étude numérique traite le problème sous les aspects eulérien et lagrangien. L'aspect lagrangien consiste à considérer un ensemble de traceurs suivi dans le temps par l'équation du mouvement :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

où $\mathbf{x}(t)$ indique la position du traceur à l'instant t , et \mathbf{u} sa vitesse à la position \mathbf{x} au temps t . Il est établi [60], [2] qu'un écoulement mélange si un ensemble de traceurs initialement concentré en un point de l'écoulement, fini par être réparti de façon homogène dans tout l'écoulement au bout d'un temps suffisamment long. Le caractère mélangeant implique l'ergodicité du système lagrangien [22]. Dans l'approche adoptée dans cette étude, nous considérons le cas de traceurs n'interagissant en aucune façon avec l'écoulement et sans diffusivité. Dans ce cas, le mélange ne peut se faire que si les trajectoires de particules sont chaotiques [49].

L'une des conditions nécessaire à la présence de chaos dans un système autonome et continu en temps est qu'il soit de dimension au moins égale à 3 [17]. Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, cette propriété traduit le fait que l'écoulement *doit* être instationnaire (le temps faisant ici office de troisième dimension). Pour cette raison, nous caractérisons le mélange dans l'écoulement à partir de la première bifurcation de Hopf.

L'aspect eulérien de l'écoulement consiste ici à résoudre numériquement pour chaque temps t les champs de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, de température θ et de pression p . Il est établi que des trajectoires de particules chaotiques n'impliquent pas nécessairement que l'écoulement soit chaotique [2]. Pour cette raison, nous traitons également les transitions vers le chaos dans l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$ séparément du point de vue lagrangien et eulérien.

Le chapitre 2 présente l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$. Nous y établissons les équations, l'adimensionnement et les observables utilisés dans la suite du mémoire. Nous y rappelons également les premières transitions de l'écoulement vers une dynamique périodique puis quasipériodique en temps. La caractérisation et la quantification du mélange dans l'écoulement périodique en temps font l'objet du chapitre 3. Les bifurcations qui conduisent l'écoulement à devenir chaotique du point de vue eulérien sont décrites et caractérisées au chapitre 4. Nos conclusions et perspectives de l'ensemble de l'étude sont présentées au chapitre 5. Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, de nombreux aspects numériques liés à nos travaux sont présentés en annexe (A) pour la partie eulérienne et (B) pour la partie lagrangienne.

Dans la version numérisée de ce document, des liens hypertexte existent pour toutes les références bibliographiques, à des figures, paragraphes, chapitres et tableaux. Des balises textuelles signalées [en bleu](#) dans les légendes des figures et tableaux permettent de retourner vers le paragraphe dans lequel est citée la référence.

L'écoulement de cavité différentiellement chauffée bidimensionnelle

Sommaire

2.1	Présentation de l'écoulement	4
2.1.1	Formulation mathématique	6
2.1.2	Analyse en ordres de grandeur de l'écoulement	7
2.1.3	Adimensionnement des équations	9
2.2	Symétries de l'écoulement	11
2.3	Observables	12
2.4	Suivi des branches centro-symétriques	13
2.5	Nomenclature des dynamiques toroïdales	14
2.6	Protocole d'exploration	14
2.7	Dynamiques connues	14
2.8	Conclusion	19

Variables dimensionnelles

$\mathbf{u} = (u, w)$	Champ de vitesse
u	Vitesse horizontale
w	Vitesse verticale
θ	Champ de température
$\Delta\theta$	Différence de température entre les deux parois verticales
p	Champ de pression
L	Largeur de la cavité
H	Hauteur de la cavité
β	Conductivité thermique
ν	Viscosité cinématique
μ	Viscosité dynamique
κ	Diffusivité thermique
ρ	Masse volumique
x	Direction horizontale
z	Direction verticale

Variables adimensionnelles

$\mathbf{U} = (U, W)$	Champ de vitesse
U	Vitesse horizontale
W	Vitesse verticale
Θ	Champ de température
P	Champ de pression
$Ra = (g\beta H^3 \Delta\theta)/(\nu\kappa)$	Nombre de Rayleigh
$Pr = \nu/\kappa$	Nombre de Prandtl
$A = H/L$	Rapport d'aspect
X	Direction horizontale
Z	Direction verticale
N_X	Nombre de modes spectraux suivant la direction X
N_Z	Nombre de modes spectraux suivant la direction Z
$t = H^2/(\kappa Ra^{1/2})$	Temps convectif

2.1 Présentation de l'écoulement

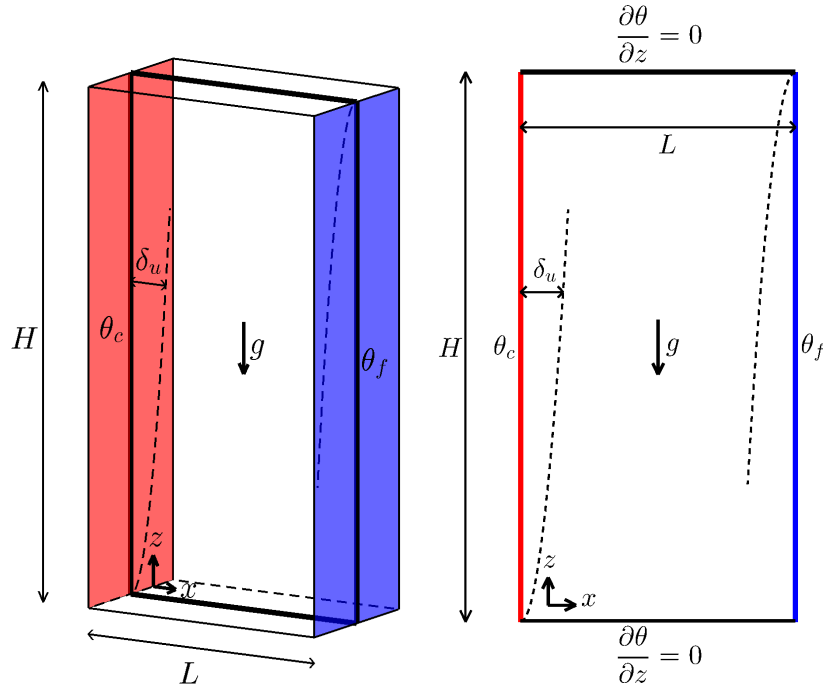


FIGURE 2.1 – Schéma de la cavité différentiellement chauffée 3D (gauche) et 2D (droite). δ_u indique la taille caractéristique des couches limites cinétique et thermique (voir §2.1.2), L la largeur de la cavité (suivant la direction x), H la hauteur de la cavité (direction z). θ_c et θ_f les températures auxquelles sont chauffés les bords chaud (rouge) et froid (bleu) de la cavité. Le vecteur g indique la pesanteur, $\partial_z\theta = 0$ indique les conditions aux limites adiabatiques. ([Retour au texte](#))

L'écoulement de convection naturelle dans les cavités différentiellement chauffées a été initialement étudié par Batchelor (1954) [7]. Ce système décrit les géométries où un gradient thermique est imposé perpendiculaire aux forces de pesanteur \mathbf{g} (voir Fig. 2.1). Dans cet article, l'auteur établit que l'écoulement dépend principalement de trois paramètres adimensionnés :

1. le rapport de forme $A = H/L$ qui compare la hauteur H à la largeur L de la cavité ;
2. le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ qui dépend de ν et κ la viscosité cinématique et la diffusivité thermique du fluide, respectivement ;
3. Le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{g\beta\Delta\theta L_{ref}^3}{\nu\kappa}$ qui représente un nombre sans dimension dépendant des propriétés du fluide (β est la conductivité thermique), de l'écart en température entre les parois $\Delta\theta = \theta_c - \theta_f$ et L_{ref} une longueur de référence (définie par $L_{ref} = H$ dans l'ensemble du mémoire [voir §2.1.2]). On retrouve également ce paramètre souvent exprimé sous la forme du nombre de Grashof $Gr = \frac{g\beta\Delta\theta L_{ref}^3}{\nu^2}$ avec $Ra = GrPr$.

Si le fluide est confinée dans sa direction verticale, l'écoulement possède une zone de recirculation principale dès lors que $Ra > 0$. Batchelor a également mis en évidence deux types de régimes distincts. Le premier, appelé régime convectif, est présent lorsque des couches limites thermiques et/ou cinétiques se développent le long des parois chaude et froide de la cavité. Le second régime, appelé régime conductif, est présent lorsque les couches limites ne sont pas dissociées.

La transition à l'instationnarité de l'écoulement dépend des trois paramètres A , Pr et Ra ainsi que du type des conditions aux limites imposées sur les parois de la cavité. La plupart des études réalisées autour de cet écoulement considèrent les effets tridimensionnels négligeables. Dans ce cas de figure et considérant le fluide dans la cavité comme de l'air ($Pr = 0.71$), pour des conditions aux limites adiabatiques et pour des rapports de formes élevés ($10 \geq A \geq 4$), l'instationnarité du système provient d'ondes progressives qui se développent dans les couches limites. Toutefois, pour $1 \leq A < 3$ l'instationnarité provient d'oscillations présentes dans les coins de la cavité ([46], [44], [62], [80], [81], [82]). De même, pour des conditions aux limites adiabatiques, mais pour du germanium en fusion ($Pr = 0.00715$) à $A = 1/2$, l'instationnarité provient d'oscillations symétriques par rapport au cœur de la cavité ([54],[53]). Dans le cas $A \ll 1$ les couches limites verticales ne sont pas pleinement développées avant l'apparition de l'instationnarité ([63], [16], [27]).

Pour des parois horizontales parfaitement conductrices en revanche, l'instationnarité provient d'instabilités thermiques le long des parois horizontales. Ces instabilités sont absorbées par les couches limites verticales où elles peuvent être amorties ou amplifiées tel que décrit par [26], [20].

De nombreuses études ont également été conduites du point de vue expérimental avec des cavités remplies d'air [21], [55], [3] (faible Pr), de la paraffine médicale et une huile siliconée ($Pr \simeq 10^3$) [23], ... et font aujourd'hui référence pour l'utilisation et la calibration de codes numériques pour simuler l'écoulement. L'un des problèmes principaux soulevés par les comparaisons entre expérimentations et simulation provient de la définition des conditions aux limites du problème. La simulation numérique permet de considérer des cas idéaux difficilement atteignables dans les études expérimentales.

Récemment, Xin et Le Quéré (2014) ont montré, dans le cas de la simulation numérique d'une cavité infinie suivant sa direction transverse, remplie d'air et adiabatique pour ses parois horizontales, que les premières instabilités de l'écoulement sont tridimensionnelles si le rapport d'aspect $A = \text{hauteur/largeur}$ est inférieur à 7 [83] (voir fig. 2.2). Ces instabilités saturent sous la forme d'une onde stationnaire de faible amplitude dont la vitesse induite est approximativement d'un ordre de grandeur inférieure aux vitesses caractéristiques de l'écoulement stationnaire. Ces perturbations sont localisées le long des parois supérieures et inférieures et leur propagation est orientée dans la direction transverse de la cavité. Ces perturbations 3D sont responsables de l'instationnarité pour des valeurs en Ra inférieures à celles établies par les précédentes études. La dynamique résultante est alors périodique et de pulsation faible comparée à celle du premier mode instationnaire bidimensionnel (environ d'un facteur 20).

Dans toute la suite de notre étude, nous faisons l'approximation que ces ondes transverses sont négligeables par rapport aux perturbations 2D. Cet écoulement idéalisé est traité sous son aspect bidimensionnel.

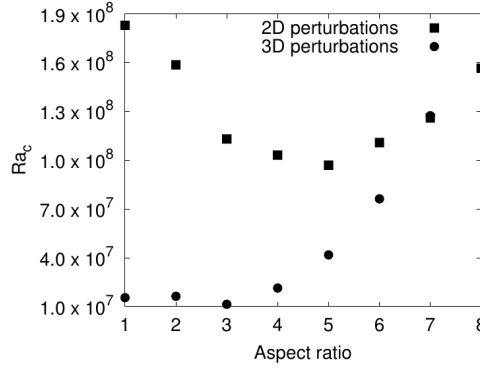


FIGURE 2.2 – Points de bifurcations en fonction de $Ra = \frac{g\beta\Delta\theta H^3}{\nu\kappa}$ et $A = H/L$. Image extraite de [83]. ([Retour au texte](#))

2.1.1 Formulation mathématique

Nous considérons le cas idéalisé d'une cavité rectangulaire 2 fois plus haute que large ($A = H/L = 2$), dont la paroi gauche est soumise à une température θ_c et la paroi droite à une température $\theta_f < \theta_c$. Soit l'écart en température $\Delta\theta = \theta_c - \theta_f$. Nous supposons que l'instabilité tridimensionnelle est suffisamment faible sur notre plage d'étude pour supposer l'écoulement invariant par translation suivant la direction y . Nous négligeons les flux thermiques aux parois verticales et les effets de rayonnement. Les deux parois horizontales sont considérées comme parfaitement adiabatiques. L'origine des coordonnées est prise en $(x, z) = (0, 0)$ comme correspondant au coin inférieur gauche de la cavité. La configuration du système est illustrée sur la figure 2.1. Nous considérons la cavité remplie d'air ($Pr = 0.71$).

Nous considérons valide l'approximation de Boussinesq. Cette approximation considère que la masse volumique du fluide ρ varie faiblement et ne dépend que de la température θ :

$$\rho(\theta) = \rho_0(\theta_0)[1 - \beta(\theta - \theta_0)], \quad (2.1)$$

où ρ_0 et θ_0 correspondent à la densité et la température moyenne de l'écoulement. β est la conductivité thermique du fluide (de l'ordre de 10^{-3} pour l'air). Nous considérons que $\theta - \theta_0 \ll 1$ et que les variations temporelles de ρ sont négligeables.

Les équations de Navier-Stokes régissant la dynamique du fluide sont alors [74], [82] :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g\beta\Delta\theta, \quad (2.4)$$

et

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right). \quad (2.5)$$

avec $\mathbf{u}(x, z, t) = (u(x, z, t), w(x, z, t))$ le champ de vitesse, p la pression, g l'accélération due à la pesanteur et $\Delta\theta = \theta_c - \theta_f$. Les conditions aux limites sont :

$$\theta(x = 0, z) = \theta_c > \theta(x = L, z) = \theta_f,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}(x, z = 0) = \frac{\partial \theta}{\partial z}(x, z = H) = 0.$$

De plus, la vitesse est imposée nulle aux parois de la cavité : $\mathbf{u}(x = 0, z) = \mathbf{u}(x = L, z) = \mathbf{u}(x, z = 0) = \mathbf{u}(x, z = H) = 0$.

2.1.2 Analyse en ordres de grandeur de l'écoulement

L'objectif de ce paragraphe est d'établir les différents ordres de grandeur régissant l'écoulement et d'en déduire lois d'échelles et adimensionnements possibles des équations (2.2), (2.3), (2.4), (2.5).

Dans toute l'analyse, nous supposons que l'écoulement varie très peu en temps, et peut être considéré comme stationnaire $\left(\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0\right)$. Soient U , W et $\Delta\theta$ les ordres de grandeurs correspondant à u , w et θ respectivement. Soient δ_U et δ_Θ les ordres de grandeurs correspondant respectivement à l'épaisseur de la couche limite cinématique et l'épaisseur de la couche limite thermique suivant x . Dans cette analyse, nous prenons z comme longueur caractéristique verticale. L'équation (2.2) impose :

$$\frac{U}{\delta_U} \sim \frac{W}{z}. \quad (2.6)$$

En comparant les termes convectifs et diffusifs dans l'équation (2.3), nous obtenons :

$$\frac{U^2}{\delta_U} + \frac{UW}{z} \sim \nu \left(\frac{U}{\delta_U^2} + \frac{U}{z^2} \right).$$

Supposons qu'à une hauteur z suffisamment élevée, $\delta_U \ll z$, via (2.6), nous obtenons :

$$\frac{U^2}{\delta_U} \sim \nu \frac{U}{\delta_U^2}.$$

ou :

$$\delta_U^2 \sim \nu \frac{z}{W}.$$

En définissant le nombre de Reynolds basé sur la hauteur z comme $Re_z = \frac{Wz}{\nu}$, il vient "classiquement" :

$$\frac{\delta_U}{z} \sim Re_z^{-1/2}. \quad (2.7)$$

L'épaisseur des couches limites cinétiques varie donc comme $\delta_U \sim z Re_z^{-1/2} \sim z^{1/2}$.

Partant maintenant de l'équation (2.5) et en considérant que les échelles caractéristiques suivant x correspondent à δ_Θ ,

$$\frac{U\Delta\theta}{\delta_\Theta} + \frac{W\Delta\theta}{z} \sim \kappa \left(\frac{\Delta\theta}{\delta_\Theta^2} + \frac{\Delta\theta}{z^2} \right).$$

Supposons que $\delta_\Theta \ll z$, en utilisant (2.6),

$$\frac{\delta_U}{\delta_\Theta} + 1 \sim \frac{z\kappa}{W\delta_\Theta^2}.$$

Deux cas sont alors possibles :

1. $\frac{\delta_U}{\delta_\Theta} \gg 1$ ou $\frac{\delta_U}{\delta_\Theta} \sim 1$. Dans ce cas, nous obtenons :

$$\delta_U \delta_\Theta \sim \frac{z\kappa}{W},$$

ce qui, en introduisant le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$, se traduit par :

$$\delta_U \delta_\Theta \sim z^2 Re_z^{-1} Pr^{-1}.$$

En utilisant (2.7) nous avons alors :

$$\frac{\delta_\Theta}{z} \sim Pr^{-1} Re_z^{-1/2}, \quad (2.8)$$

soit :

$$\frac{\delta_U}{\delta_\Theta} \sim Pr \gg 1 \text{ ou } \sim 1, \quad (2.9)$$

suitant l'hypothèse préférée initialement.

2. $\frac{\delta_U}{\delta_\Theta} \ll 1$. Alors :

$$\frac{z\kappa}{W\delta_\Theta^2} \sim 1,$$

menant à :

$$\frac{\delta_\Theta}{z} \sim Re_z^{-1/2} Pr^{-1/2}, \quad (2.10)$$

soit :

$$\frac{\delta_U}{\delta_\Theta} \sim Pr^{1/2} \ll 1, \quad (2.11)$$

par hypothèse.

Dans le cas de l'air, $Pr = 0.71$. Nous avons donc $\delta_U \sim \delta_\Theta$. (2.6) devient alors :

$$\frac{U}{\delta_\Theta} \sim \frac{W}{z}, \quad (2.12)$$

L'équation (2.7) devient :

$$\left(\frac{U}{\delta_\Theta} + \frac{W}{z} \right) \Delta\theta \sim \frac{\kappa\Delta\theta}{\delta_\Theta^2}$$

En utilisant (2.12),

$$\frac{U\Delta\theta}{\delta_\Theta} \sim \frac{\kappa\Delta\theta}{\delta_\Theta^2},$$

soit :

$$U \sim \frac{\kappa}{\delta_\Theta}. \quad (2.13)$$

En comparant maintenant les termes : $\nu\nabla^2\mathbf{u}$ et $g\beta\Delta\theta$,

$$\nu\nabla^2\mathbf{u} \sim g\beta\Delta\theta \rightarrow \nu \left(\frac{W}{\delta_\Theta^2} + \frac{W}{z^2} \right) \sim g\beta\Delta\theta.$$

Supposons $\delta_\Theta \ll z$, nous obtenons :

$$\frac{\nu W}{\delta_\Theta^2} \sim g\beta\Delta\theta,$$

soit :

$$\frac{W}{\delta_\Theta^2} \sim \frac{g\beta\Delta\theta}{\nu}. \quad (2.14)$$

En utilisant les résultats (2.12) et (2.13),

$$\frac{\kappa z}{\delta_\Theta^4} \sim \frac{g\beta\Delta\theta}{\nu},$$

soit :

$$\left(\frac{z}{\delta_\Theta} \right)^4 \sim \frac{g\beta\Delta\theta z^3}{\nu\kappa} = Ra_z.$$

En définissant le nombre de Rayleigh global Ra en $z = H$, nous pouvons donc en déduire que :

$$\boxed{\frac{\delta_\Theta}{H} \sim Ra^{-1/4}}. \quad (2.15)$$

Ce résultat indique que l'épaisseur des couches limites thermiques et visqueuses varie comme $Ra^{-1/4}$. En ré-introduisant cette expression dans l'équation (2.13), combinée à (2.12), nous obtenons finalement :

$$\boxed{W \sim \frac{\kappa}{H} Ra^{1/2}}. \quad (2.16)$$

Ainsi, en choisissant une vitesse d'adimensionnement $V_{ref} = \frac{\kappa}{H} Ra^{1/2}$, nous nous assurons que la vitesse adimensionnée reste $\mathcal{O}(1)$ pour Ra grand.

Deux cas sont alors possibles :

1. Dans le régime diffusif (aussi appelé régime de couches limites non-séparées), où le moteur de l'écoulement (ici les termes de poussée d'Archimède) est comparé aux termes visqueux :

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} \sim g\beta\theta \rightarrow \nu \left(\frac{W}{L^2} + \frac{W}{H^2} \right) \sim g\beta\Delta\theta.$$

Si $H \sim L$,

$$W \sim \frac{g\beta\Delta\theta H^3}{\nu\kappa} \frac{\kappa}{H} = \frac{\kappa}{H} Ra := V_{diff}.$$

En régime diffusif, la vitesse varie donc comme Ra . En considérant l'adimensionnement par V_{ref} , nous obtenons :

$$U_{diff} \sim \frac{V_{diff}}{V_{ref}} \sim Ra^{1/2}.$$

L'énergie cinétique adimensionnelle est définie par :

$$E_k = 1/2 \int_{X=0}^{X=1/A} \int_{Z=0}^{Z=1} |\mathbf{U}|^2 dX dZ,$$

soit en régime diffusif :

$$\boxed{E_k \sim U_{diff}^2 \sim Ra.} \quad (2.17)$$

2. Dans le régime convectif (régime de couches limites séparées) les couches limites concentrent l'énergie cinétique. La vitesse adimensionnée U doit varier comme V_{ref} , soit $U_{conv} \sim V_{ref}/V_{ref} = 1$. Dans ce cas, l'énergie cinétique est :

$$E_k \sim \int_{X=0}^{X=\delta_\Theta} \int_{Z=0}^{Z=H} |\mathbf{U}|^2 dX dZ$$

Soit :

$$E_k \sim (U_{conv}^2 \delta_\Theta + U_{conv}^2 H).$$

H étant constant et $\delta_\Theta \sim Ra^{-1/4}$,

$$\boxed{E_k \sim Ra^{-1/4}.} \quad (2.18)$$

Ces deux lois d'échelles pour E_k sont représentées sur la figure 2.3. Nous observons le régime conductif, où $E_k \sim Ra$, jusqu'à $Ra \approx 10^4$. Le régime de couches limites séparées, où $E_k \sim Ra^{-1/4}$, se vérifie pour $Ra \gtrsim 2 \times 10^5$.

En utilisant les résultats (2.7) et (2.15), en considérant $Pr \sim 1$ et $z = H$, nous obtenons la relation entre Re et Ra :

$$Re = Ra^{1/2}. \quad (2.19)$$

2.1.3 Adimensionnement des équations

L'analyse en ordre de grandeur présentée au §2.1.2 introduit le nombre de Rayleigh

$$\boxed{Ra = \frac{g\beta\Delta\theta H^3}{\nu\kappa}}, \quad (2.20)$$

duquel dépend l'adimensionnement des équations (2.3), (2.4) et (2.5). Les grandeurs de références utilisées pour l'adimensionnement sont données dans le tableau 2.3 et permettent d'obtenir les équations adimensionnées [82] :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= Pr(-\nabla P + Ra^{-1/2} \nabla^2 \mathbf{U}) + \Theta \mathbf{e}_z, \\ \partial_t \Theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta &= Ra^{-1/2} \nabla^2 \Theta, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

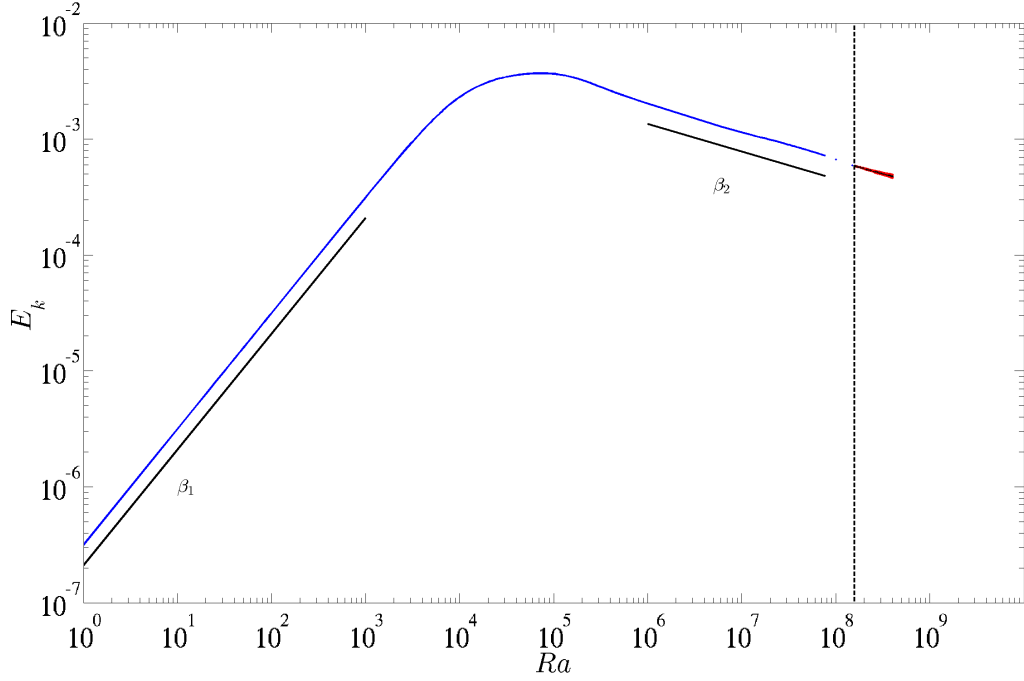


FIGURE 2.3 – Évolution de l'énergie cinétique $E_k = f(Ra)$ pour les états stationnaires du système (bleu). La pente $\beta_1 = 0.9987 \approx 1$ correspond aux régimes diffusifs, la pente $\beta_2 = -0.2366 \approx -1/4$ correspond au régime de couches limites séparées. La droite en pointillés marque le début des régimes instationnaires du système (rouge). Les valeurs présentées ont été obtenues par simulation numérique directe (DNS). ([Retour au texte](#))

Grandeur	Valeur
Longueur de référence	$L_{ref} = H$
Vitesse de référence	$V_{ref} = \frac{\kappa Ra^{1/2}}{H}$
Temps de référence	$t_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}}$
Pression de référence	$P_{ref} = \frac{\rho_0 U_{ref}^2 \nu}{\kappa}$
Nombre de Rayleigh	$Ra = \frac{g \beta \Delta \theta H^3}{\nu \kappa}$
Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$
Différence de température	$\Delta \theta = \theta_h - \theta_c$
Température moyenne	$\theta_0 = \frac{\theta_h + \theta_c}{2}$

TABLE 2.3 – Grandeurs de références pour l'adimensionnement du problème. ([Retour au texte](#))

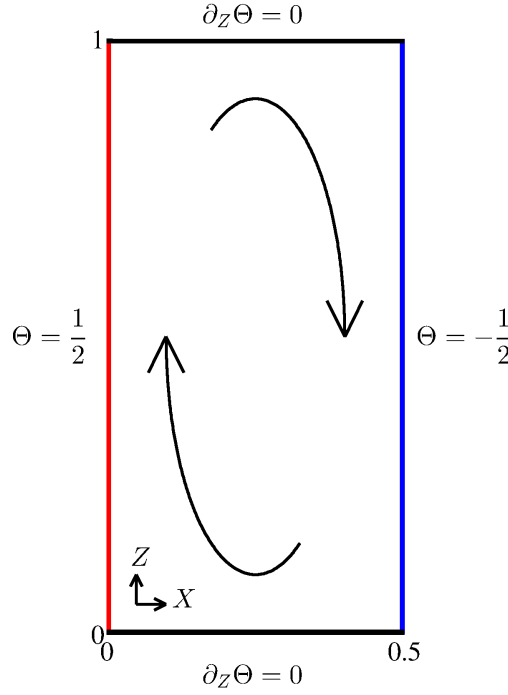


FIGURE 2.4 – Schéma du système. Θ correspond au champ de température adimensionné. Le mur chaud est indiqué en rouge, le mur froid en bleu. Les flèches indiquent le sens de l'écoulement. X et Z représentent les positions adimensionnées suivant les directions horizontale et verticale, respectivement. ([Retour au texte](#))

Avec $\Theta = (\theta - \theta_0)/\Delta\theta$, U et P la température, vitesse et pression adimensionnées, respectivement.

Les conditions aux limites se ré-expriment dans ce choix d'adimensionnement comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta(X, Z=0)}{\partial Z} &= \frac{\partial\Theta(X, Z=1)}{\partial Z} = 0, \\ \Theta(X=0, Z) &= 0.5 = -\Theta(X=1/A, Z) \end{aligned}$$

et $U = 0$ aux parois.

La configuration utilisée est schématisée en figure 2.4 et simulée au moyen d'un code numérique réalisé par S. Xin et P. Le Quéré. Ce code utilise une méthode spectrale de type Galerkin basée sur une décomposition en polynômes de Chebyshev pour résoudre les équations (2.21). L'avancée en temps est assurée par un schéma numérique d'Adams-Bashforth d'ordre 2. Les détails liés à ces méthodes numériques sont donnés en annexe A.1. Le nombre de modes spectraux choisi pour étudier le problème est de 80×100 suivant les directions X et Z , respectivement. Le choix de la discrétisation spectrale est obtenu à partir du calcul du plus grand exposant de Lyapunov λ_1 pour une dynamique hyperchaotique pour $Ra = 4 \times 10^8$. Nos résultats montrent qu'au delà d'une discrétisation de 80×100 modes, la précision acquise sur l'évaluation de λ_1 n'est plus significative. Ces résultats sont donnés en annexe A.6. Le pas de temps est fixé sur l'ensemble de l'étude à $\Delta t = 10^{-3}$.

2.2 Symétries de l'écoulement

Les conditions aux limites en température (constante pour les deux murs verticaux, flux nul sur les deux murs horizontaux) et de non-glissement (vitesse nulle aux parois) conduisent le système à présenter une symétrie de rotation d'angle π par rapport au centre de la cavité. Le système est

donc associé au groupe de symétrie \mathbb{Z}_2 . Définissons les opérateurs :

$$\begin{aligned} R : (X, Z) &\rightarrow (1/A - X, 1 - Z), & R^2 &= I \\ \zeta : (U, W, \Theta, P) &\rightarrow (-U, -W, -\Theta, P), & \zeta^2 &= I \end{aligned} \quad (2.22)$$

Soit $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = (U, W, \Theta, P)(\mathbf{X}, t)$. Les dynamiques vérifiant $\mathbf{V}(R\mathbf{X}, t) = \zeta\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ à tout temps t sont qualifiées de dynamiques centro-symétriques (*CS*). Par construction du système, $\mathbf{V}(R\mathbf{X}, t) = \zeta\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ est vérifié pour tout état stationnaire du système : tout état stationnaire est donc nécessairement *CS*. Nous qualifions dans la suite de ce mémoire toute dynamique ne répondant pas à cette définition de non centro-symétrique (*NCS*).

La symétrie \mathbb{Z}_2 a un impact direct sur les bifurcations de l'écoulement : si une dynamique périodique est *symétrique* mais *n'appartient pas à l'espace des solutions CS*, elle ne peut alors pas bifurquer par doublement de période (voir [43]).

2.3 Observables

L'espace des solutions des équations de Navier-Stokes est un espace de représentation de dimension infinie. Soient N_X et N_Z le nombre de points de collocation suivant les directions X et Z , respectivement. Dans notre cas, l'espace des états est de dimension $4N_X \times N_Z = \mathcal{O}(10^4)$ ($N_X \times N_Z$ points de représentation par champ). C'est pourquoi, la dynamique temporelle est projetée sur un ensemble réduit de variables. Cet ensemble de variables, ou observables, permet notamment de représenter des portraits de phase réduits à 2 ou 3 dimensions des différentes dynamiques explorées. Ces observables sont :

1. les énergies cinétique E_k et thermique E_Θ intégrées sur toute la cavité. Ces énergies sont respectivement définies comme :

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_{Z=0}^{Z=1} \int_{X=0}^{X=1/A} |U(X, Z, t)|^2 dX dZ \quad (2.23)$$

et

$$E_\Theta(t) = \frac{1}{2} \int_{Z=0}^{Z=1} \int_{X=0}^{X=1/A} |\Theta(X, Z, t)|^2 dX dZ. \quad (2.24)$$

Elles sont en pratique évaluées comme :

$$\begin{pmatrix} E_k(t) \\ E_\Theta(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_X} \sum_{j=1}^{N_Z} \begin{pmatrix} (U_{i,j}(t)^2 + W_{i,j}(t)^2) \\ \Theta_{i,j}^2(t) \end{pmatrix} (X_{i+1} - X_i)(Z_{j+1} - Z_j), \quad (2.25)$$

avec $U_{i,j}(t), W_{i,j}(t)$ et $\Theta_{i,j}(t)$ les champs de vitesse et de température discrétisés sur (X_i, Z_j) , $i = 1, \dots, N_X$, $j = 1, \dots, N_Z$. Dans les portraits de phase (E_k, E_Θ) , les moyennes temporelles de ces énergies sont soustraites à chacun des signaux.

2. les indicateurs de symétries globaux des variables (U, W, Θ) , notés (s_U, s_W, s_Θ) . Ils sont calculés comme :

$$\begin{pmatrix} s_U(t) \\ s_W(t) \\ s_\Theta(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N_X+1} \sum_{j=1}^{N_Z+1} \begin{pmatrix} U_{i,j}(t) \\ W_{i,j}(t) \\ \Theta_{i,j}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

3. Les indicateurs de demi-symétrie des variables (U, W, Θ) , notés (hs_U, hs_W, hs_Θ) :

$$\begin{pmatrix} hs_U(t) \\ hs_W(t) \\ hs_\Theta(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\frac{N_X}{2}} \sum_{j=1}^{N_Z} \begin{pmatrix} U_{i,j}(t) \\ W_{i,j}(t) \\ \Theta_{i,j}(t) \end{pmatrix} - \left\langle \sum_{i=1}^{\frac{N_X}{2}} \sum_{j=1}^{N_Z} \begin{pmatrix} U_{i,j}(t) \\ W_{i,j}(t) \\ \Theta_{i,j}(t) \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.27)$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne temporelle. Ces indicateurs n'ont pas de sens physique à proprement parler mais permettent de représenter des portraits de phase 3D des dynamiques centro-symétriques (*CS*).

Chacun de ces observables est utilisé pour caractériser un certain type de dynamique. Les indicateurs de symétrie (s_U, s_W, s_Θ) permettent de vérifier si une dynamique est CS ($s_U = s_W = s_\Theta = 0$) ou non centro-symétrique (NCS). Dans le cas où la dynamique observée est NCS , ils peuvent être utilisés pour projeter la dynamique dans un espace réduit à trois dimensions. Les indicateurs de demi-symétrie hs sont utilisés pour représenter les dynamiques CS . Les énergies sont utilisées pour déterminer l'origine d'une dynamique, lorsque les deux autres indicateurs ne le permettent pas. En soi, les énergies cinétiques et thermiques peuvent également être utilisées pour représenter tout type de dynamique observée. Cependant, de par leur nature quadratique, elles ne permettent pas de distinguer les dynamiques symétriques des dynamiques non-symétriques (la symétrie étant brisée par l'élévation au carré des variables).

D'autres indicateurs sont également utilisés :

1. la norme temporelle des symétries :

$$s(t) = \sqrt{s_U(t)^2 + s_W(t)^2 + s_\Theta(t)^2}, \quad (2.28)$$

2. l'indicateur moyen de symétrie :

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (s_U(t) + s_W(t) + s_\Theta(t)) dt, \quad (2.29)$$

3. les exposants de Lyapunov (voir annexe A.2). La valeur en-deçà de laquelle un exposant de Lyapunov peut être considéré nul est évaluée autour de 10^{-4} . Les détails de ce choix ont été calibrés sur une dynamique T^1 de la cavité différentiellement chauffée et sont présentés en annexe A.2.5. Pour ne pas alourdir la lecture de ce chapitre, seuls les signes des exposants de Lyapunov sont présentés dans ce chapitre sous la forme $+$ pour les exposants positifs, 0 pour les exposants nuls et $-$ pour les exposants négatifs. Les valeurs numériques associées sont regroupées sur le tableau A.3 présenté en annexe.
4. l'indicateur $C_{av}(\tau)$ (voir annexe A.5). Cet indicateur permet d'estimer si une dynamique est de nature périodique/quasi-périodique ou chaotique de façon moins coûteuse que les exposants de Lyapunov.
5. la pulsation dominante associée à une dynamique ω_e (voir annexe A.3). Les valeurs de ω_e sont regroupées dans le tableau A.4, présenté en annexe.
6. la représentation spatiale des modes de Fourier associés à une pulsation donnée (voir annexe A.4).

Une dynamique est CS si pour tout temps t , $s(t) = 0$. Définissons :

$$s_{\max} = \max_t(s(t)) \quad (2.30)$$

et

$$s_{\min} = \min_t(s(t)). \quad (2.31)$$

Une dynamique est qualifiée de globalement symétrique S si elle vérifie $S = 0$ et $s_{\min} \neq 0$. Auquel cas, la dynamique obtenue évolue sur un attracteur symétrique mais qui n'appartient pas aux solutions de l'espace CS .

2.4 Suivi des branches centro-symétriques

Le suivi des dynamiques CS instables vis à vis de perturbations NCS est réalisé en imposant à chaque pas de temps la symétrie CS au système :

$$(U, W, \Theta, P)(1/A - X, 1 - Z, t) = (-U, -W, -\Theta, P)(X, Z, t). \quad (2.32)$$

En pratique, la symétrie CS est imposée à partir de la partie haute de la cavité. La relation (2.32) est donc imposée à tout temps t à la partie basse de la cavité. Le point situé à l'exact centre de la cavité voit ses valeurs (U, W, Θ, P) mises à $(0, 0, 0, P)$.

2.5 Nomenclature des dynamiques toroïdales

Une dynamique est qualifiée de T^n si elle possède n fréquences incommensurables. Cela se traduit également par n exposants de Lyapunov nuls, les autres étant négatifs. Dans cette nomenclature, une dynamique stationnaire est appelée T^0 , une dynamique périodique T^1 , tandis que T^m , $m \geq 2$ correspond aux dynamiques toroïdales ([30], [70]). Dans le cas d'une dynamique T^n , nous appelons ω_e la pulsation dominante (la plus petite pour une dynamique T^2) et ω_p la pulsation la plus rapide.

2.6 Protocole d'exploration

La recherche de nouvelles dynamiques est réalisée en parcourant $Ra \in]0, 4 \times 10^8]$. Pour chaque valeur de Ra pour laquelle le système est instationnaire, les temps de simulations sont compris entre 8000 et 10^5 unités de temps. Une fois la dynamique identifiée au moyen des critères et observables décrits au §2.3, une exploration en Ra plus fine est réalisée afin de déterminer les seuils d'apparition et de disparition de la dynamique trouvée.

Lorsqu'un doute existe sur la dynamique observée, le calcul des exposants de Lyapunov est réalisé afin d'obtenir un critère supplémentaire sur la nature de la dynamique identifiée.

L'exploration en Ra comprend environ 1200 simulations pour un temps de calcul total de l'ordre de 10^5 heures *CPU*. Les calculs ont été réalisés par des processeurs Intel® Core™ i5 et i7 cadencés à environ 3Ghz.

L'ensemble des figures et post-traitements présenté dans ce mémoire a été réalisé sous MATLAB® R2013b.

2.7 Dynamiques connues

Nous présentons dans ce paragraphe les dynamiques déjà répertoriées par de précédentes études pour $Ra \in [0, 2.1] \times 10^8$. Ces dynamiques, respectivement nommées T^0 pour l'état stationnaire, T^1 pour la dynamique périodique NCS , T_C^1 pour la dynamique périodique CS , T^2 pour la dynamique quasi-périodique NCS et T_C^2 pour la dynamique quasi-périodique CS , sont représentées de façon schématique sur le diagramme de bifurcation présenté sur la figure 2.5.

Dynamique stationnaire T^0 : La dynamique du système est stationnaire pour $Ra < 1.5865 \times 10^8$ [82]. À bas Ra , l'écoulement s'articule autour d'une zone de recirculation centrée sur le centre de la cavité et possède des isothermes quasi-verticales. Nous avons montré au §2.1 que l'épaisseur des couches limites thermique et cinétique se développant le long des parois chaude et froide varie comme :

$$\frac{\delta_\Theta}{H} \sim Ra^{-1/4}. \quad (2.33)$$

Il a été montré par [28] que si :

$$\left(\frac{L}{\delta_\Theta}\right)^4 = \frac{Ra}{A^4} \gg 1, \quad (2.34)$$

avec $(L/\delta_\Theta)^4 \gtrsim 2 \times 10^4$ (où L est la largeur de la cavité), i.e. $Ra \gtrsim 3.2 \times 10^5$, le cœur de la cavité se stratifie avec Ra croissant (voir Figs. 2.6). La zone stratifiée devient alors le siège d'ondes internes de gravité faisant osciller le cœur de la cavité. Le temps de relaxation de ces ondes internes varie comme $Ra^{1/2}$ [45]. Les ondes internes peuvent être excitées dans le cœur à des pulsations inférieures à la pulsation de Brunt-Väisälä. À partir de la stratification en température $S_\Theta \equiv H/(\Theta_h - \Theta_c) \times \partial\Theta/\partial Z$, prise le long de l'abscisse $X = 0.25$ (fig. 2.7), nous estimons la pulsation de Brunt-Väisälä $\omega_{BV} = (PrS_\Theta)^{1/2} = 0.82$ pour $Ra = 10^8$ [36], [45].

La figure 2.6 montre l'évolution des lignes de courant (haut) et des isothermes (bas) en fonction de Ra . Pour $Ra \approx 10^7$, deux zones de détachement se forment dans les coins supérieur gauche et inférieur droit de la cavité. T^0 est stable et est la seule dynamique existante jusqu'à $Ra \approx$

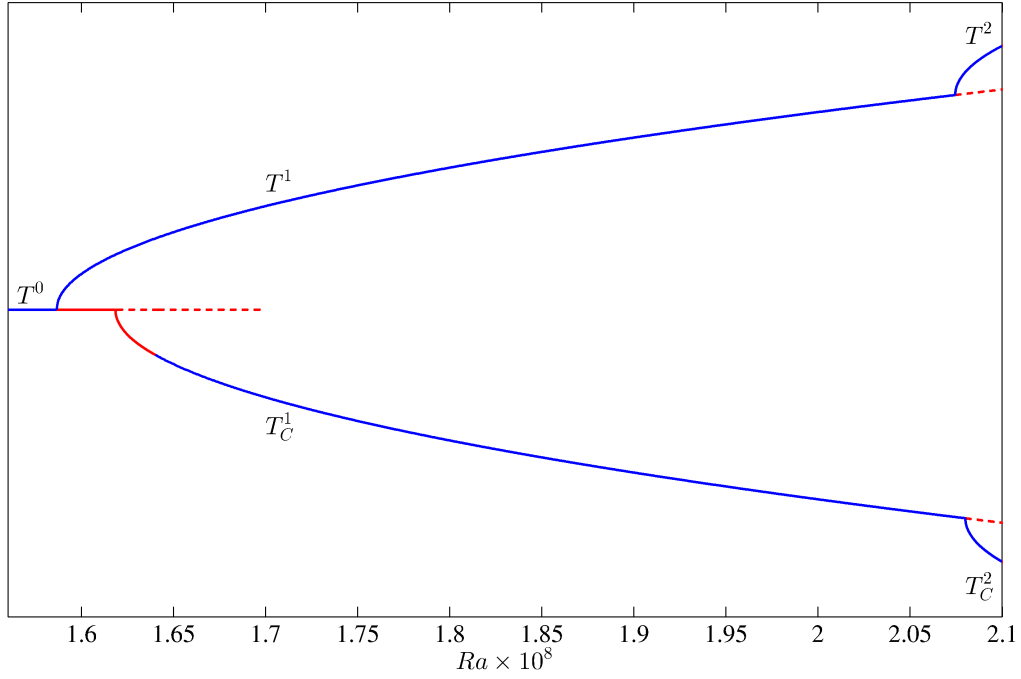


FIGURE 2.5 – Schéma des solutions *CS* et *NCS* déjà répertoriées de l'écoulement : T^0 , T^1 , T^2 , T_C^1 et T_C^2 . Les dynamiques stables sont signalées en bleu, les instables en rouge. Hormis dans le cas de la dynamique T^0 , les pointillés rouges indiquent les dynamiques instables supposées. Les courbes orientées vers le haut indiquent des dynamiques *NCS*, les courbes orientées vers le bas des dynamiques *CS*. ([Retour au texte](#))

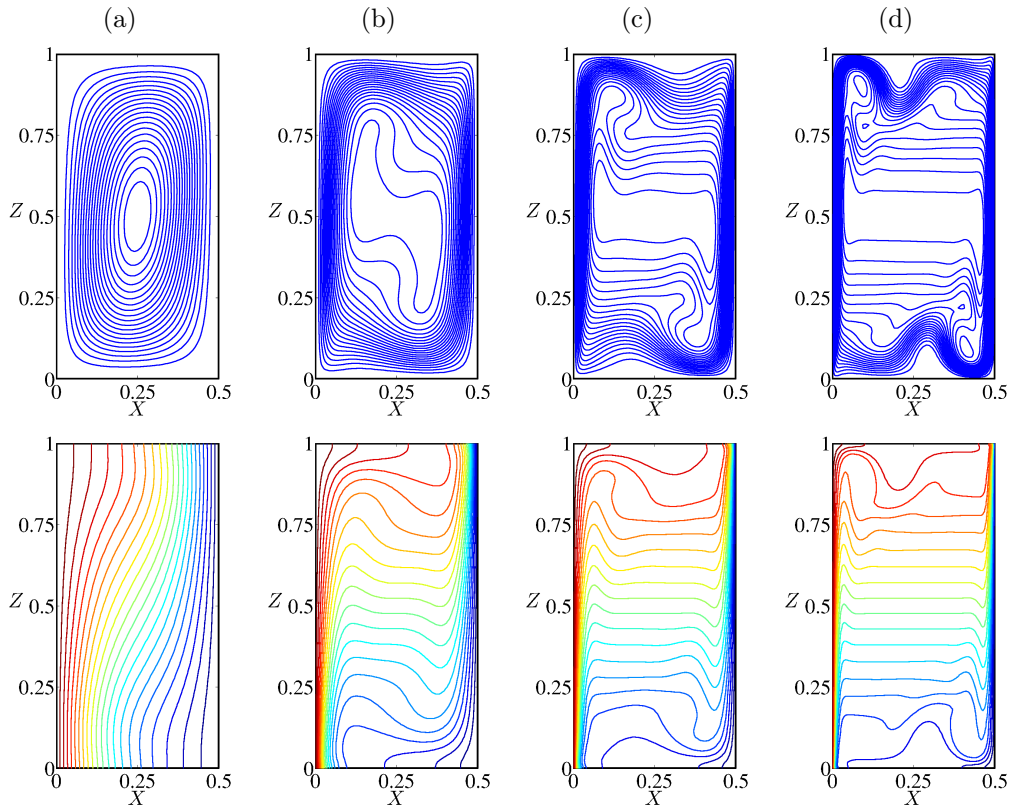


FIGURE 2.6 – Évolution de l'état stationnaire du système. 1^{ère} rangée : lignes de courant, 2^{ème} rangée : isothermes. (a) $Ra = 10^4$, (b) $Ra = 10^6$, (c) $Ra = 10^7$, (d) $Ra = 10^8$. ([Retour au texte](#))

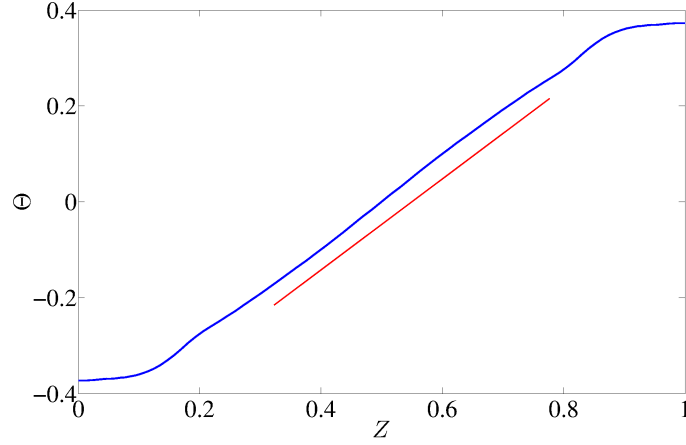


FIGURE 2.7 – Profil de température $\Theta(X = 0.25, Z)$ à $Ra = 10^8$. La pente est $\frac{\partial \Theta}{\partial Z} = 0.95$. ([Retour au texte](#))

1.5865×10^8 [82]. Le suivi de T^0 instable peut être assuré pour toute valeur de Ra par l'algorithme SFD où les paramètres tels que définis dans [1] sont choisis à $\chi = 0.14$ et $\Delta = 7.2$.

Dynamique périodique T^1 : La première bifurcation de l'état stationnaire se produit pour $Ra \approx 1.5865 \times 10^8$ (voir [82], [11]). Cette bifurcation rend la solution T^0 instable vis à vis de perturbations non centro-symétriques (*NCS*). Le régime résultant, nommé T^1 , se traduit par l'oscillation périodique en temps des zones de détachement des coins de la cavité, couplée à l'excitation d'une onde interne dans le cœur stratifié (Fig. 2.8 première ligne). Les oscillations du coin supérieur gauche sont en phase avec celles du coin inférieur droit. La bifurcation subie par la solution T^0 correspond à une bifurcation de Hopf à la pulsation $\omega_e^{T^1} \approx 0.2822$, qui varie légèrement avec Ra (cf Fig. 2.9b). Cette variation de pulsation peut s'expliquer par les effets d'amplitude finis explicités par Thorpe (1968) [72]. Dans cette étude, Thorpe a établi que la pulsation des ondes internes en milieu confiné 2D rectangulaire continûment stratifié varie comme :

$$\omega \sim \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\bar{H}^2} \right), \quad (2.35)$$

où γ^2 indique l'amplitude de l'onde interne, \bar{H}^2 la taille de la zone stratifiée, et $\omega_0 \sim \bar{H}^2$. Dans le cas de notre écoulement, nous distinguons deux parties sur la variations de ω_e : une première partie où ω_e décroît. Cette décroissance peut être expliquée par une augmentation de l'amplitude γ des ondes internes, tandis que la hauteur \bar{H} augmente plus faiblement. En augmentant Ra , l'amplitude γ sature, tandis que \bar{H} continue d'augmenter. La pulsation de l'onde ω augmente alors. Finalement, \bar{H} sature. ω_e atteint alors une valeur asymptotique. Cette asymptote est présentée pour les dynamiques T_C^2 sur la figure 2.14c.

Au point de bifurcation, le mode périodique vérifie pour tout temps t la propriété de symétrie $\mathbf{V} \left(\mathbf{X}, t + \frac{T}{2} \right) = \zeta \mathbf{V}(R\mathbf{X}, t)$ [82], $T = (2\pi)/\omega_e^{T^1}$ et l'attracteur observé est symétrique S (voir fig. 2.9a).

Dynamique périodique T_C^1 : Pour $Ra \approx 1.6184 \times 10^8$, la dynamique T^0 subit une seconde bifurcation de Hopf. L'état T^0 est alors également instable vis à vis de perturbation centro-symétriques (*CS*) (voir [82]). La dynamique *CS* résultante, nommée T_C^1 , présente une oscillation en phase, centro-symétrique et périodique en temps des zones de détachement dans les coins de la cavité, couplée à la propagation d'une onde interne dans le cœur stratifié (voir figure 2.8, seconde ligne). Le spectre de puissance (Fig. 2.10b) contient un pic dominant pour $\omega = \omega_e^{T_C^1} \approx 0.2782$. La périodicité de la dynamique se traduit par un cycle limite dans le portrait de phase en (hs_U, hs_W, hs_Θ) (voir

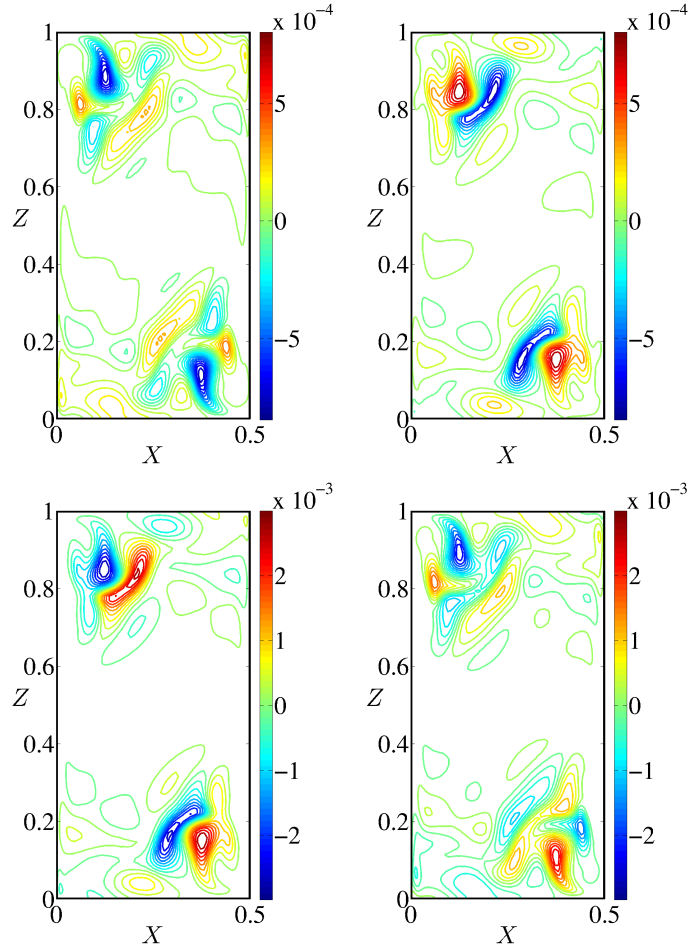


FIGURE 2.8 – Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation ω_e . Gauche : temps $t = 0[2\pi]$, droite : temps $t = -\pi/(2\omega_e)[2\pi]$. Haut : mode instationnaire non centro-symétrique (NCS) pour $Ra = 1.587 \times 10^8$ et $\omega_e \approx 0.2823$. Bas : mode instationnaire centro-symétrique (CS) pour $Ra = 1.64 \times 10^8$ et $\omega_e \approx 0.2857$. ([Retour au texte](#))

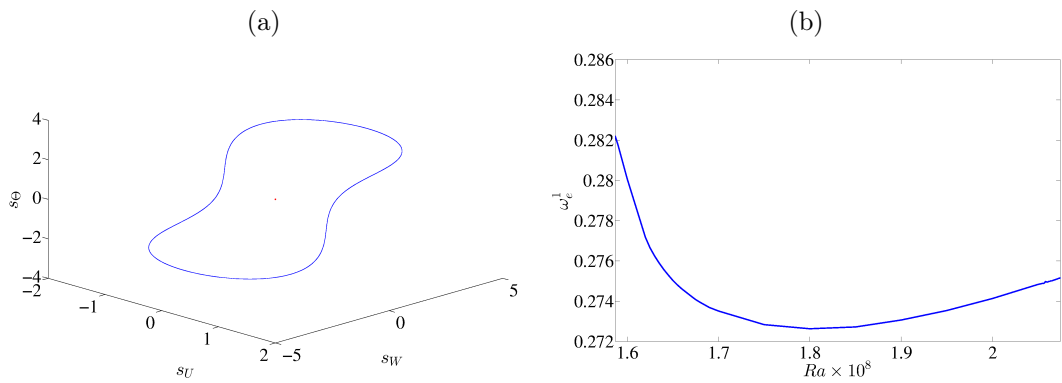


FIGURE 2.9 – (a) Portrait de phase du régime périodique T^1 pour $Ra = 1.8 \times 10^8$. (b) Évolution de la pulsation $\omega_e^{T^1} = f(Ra)$. ([Retour au texte](#))

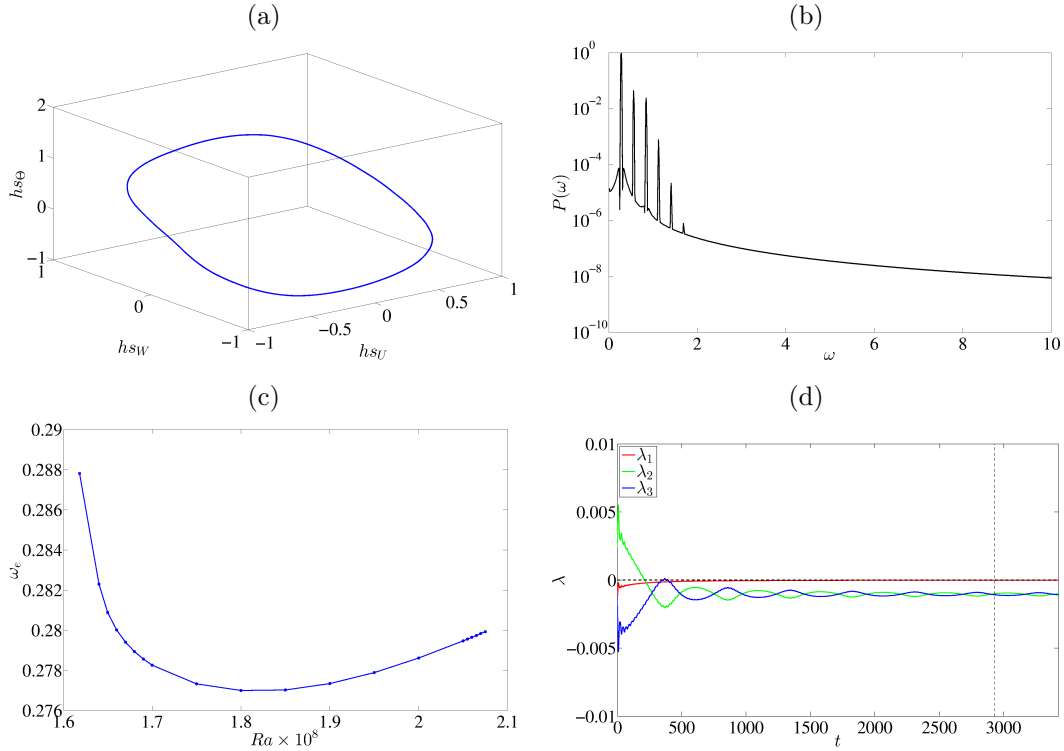


FIGURE 2.10 – Dynamique T_C^1 . (a) Portrait de phase pour $Ra = 1.64 \times 10^8$. (b) Spectre en puissance évalué sur l'énergie cinétique E_k pour $Ra = 1.64 \times 10^8$. (c) Évolution de la pulsation $\omega_e^{T_C^1}$ avec Ra . (d) $\lambda_i = f(t), i = 1, 2, 3$. Les trois exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ pour $t_\lambda = 22$. Les exposants de Lyapunov sont évalués à partir du temps indiqué en tirés noirs. ([Retour au texte](#))

Fig. 2.10a). $\omega_e^{T_C^1}$ varie peu avec Ra et présente un minimum pour $Ra \simeq 1.85 \times 10^8$ (Fig. 2.10c). Ce régime oscillant est stable dans l'espace CS mais instable vis à vis de perturbations NCS jusqu'à $Ra \approx 1.64 \times 10^8$. À cette valeur de Ra , les trois premiers exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ (voir Fig. 2.10d). T_C^1 est donc devenue une dynamique stable du système autour de $Ra \approx 1.64 \times 10^8$.

L'existence simultanée des dynamiques stables T^1 et T_C^1 provient de deux bifurcations de Hopf super critiques successives subies par T^0 . La première de ces bifurcations produit T^1 stable et T^0 instable (2 valeurs propres complexes instables). La seconde se fait sur la dynamique T^0 instable (4 valeurs propres complexes instables) et produit T_C^1 instable (2 valeurs propres complexes instables). Lorsque Ra augmente, les deux valeurs propres instables de T_C^1 deviennent stables. Ce gain en stabilité suggère l'existence d'une nouvelle bifurcation de laquelle émerge une autre branche solution instable (suivant deux valeurs propres au moins), nommée Y , séparant les bassins d'attraction des solutions T^1 et T_C^1 . Par la suite, nous généralisons Y comme l'ensemble des solutions instables séparant les bassins d'attraction des solutions CS et NCS . Ce schéma de bifurcation est illustré sur la figure 2.11.

Des scénarios de bifurcations similaires sont observés dans d'autres systèmes présentant une symétrie \mathbb{Z}_2 [6], [50], [9], [47], [43]. Dans chacun des cas, le système étudié présente deux types de dynamiques, la première répondant aux propriétés de symétrie des dynamiques CS , la seconde présentant la propriété de symétrie déphasée d'une demi-période du signal. Ce scénario de bifurcation provient d'un point de bifurcation de co-dimension 2 (dépendant de deux paramètres) pour $Pr \approx 0.64$ (voir Fig. 2.12, [11]). Pour $Pr < 0.64$, la première bifurcation du système maintient la propriété CS (branche IS). En revanche, pour $Pr > 0.64$ la première bifurcation brise la propriété CS (branche IA). Les deux autres branches de bifurcations, WS et WA , correspondent à l'ap-

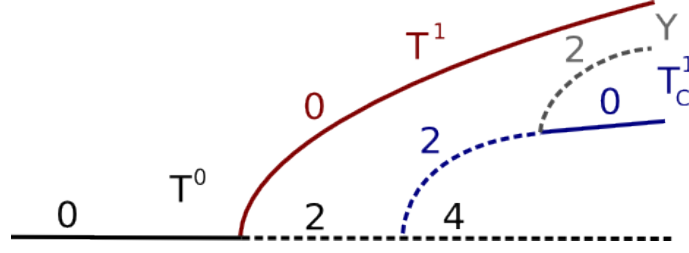


FIGURE 2.11 – Schéma du diagramme de bifurcations séparant les régimes T^0 , T^1 et T_C^1 . Les chiffres indiqués correspondent aux nombres de valeurs propres instables. Rouge : dynamique T^1 , bleu : dynamique T_C^1 , noir : état stationnaire T_0 , gris : dynamique instable Y (supposée) marquant la séparation entre les bassins d'attraction des solutions CS et NCS . ([Retour au texte](#))

parition de deux pulsations supplémentaires dans le système et interviennent respectivement dans les régimes T_C^2 et T^2 décrits ci-après. Il est montré dans [44] que si le rapport d'aspect $A \geq 4$, les premières bifurcations de l'écoulement, pour Ra croissant et $Pr = 0.71$, sont les branches WS et WA .

Dynamique quasi-périodique T_C^2 : Pour $Ra \approx 2.08 \times 10^8$ [11], la dynamique T_C^1 subit une bifurcation de Hopf secondaire (aussì appelée bifurcation de Neimark-Sacker). La dynamique résultante, nommée T_C^2 , est une dynamique quasi-périodique caractérisée par 2 pulsations incommensurables. La nouvelle pulsation est associée à la propagation périodique de rouleaux thermiques dans les couches limites verticales de la cavité (Fig. 2.13), loin du cœur stratifié. Les rouleaux produits correspondent alternativement à des perturbations chaudes et froides autour de l'état moyen en température. Ces rouleaux se propagent vers le haut le long de paroi chaude, et vers le bas le long de la paroi froide. Cette bifurcation correspond à la branche WS sur la figure 2.12. Au point de bifurcation, la pulsation correspondante est $\omega_p^{T_C^2} \approx 3.1$ (Fig. 2.14b), en rapport irrationnel avec $\omega_e^{T_C^2}$. Le portrait de phase en (hs_U, hs_W, hs_Θ) (Fig. 2.14a) représente un tore. La pulsation $\omega_e^{T_C^2}$ obtenue pour ces régimes (Fig. 2.14c) évolue dans le prolongement de la pulsation $\omega_e^{T_C^1}$ et tend vers la valeur asymptotique $\omega_e^{T_C^2} \simeq 0.2803$ (voir discussion sur les effets d'amplitude finie du paragraphe T^1). À $Ra = 2.30 \times 10^8$, les trois plus grands exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ (Fig. 2.14d) et traduisent la nature T^2 de T_C^2 .

Dynamique quasi-périodique T^2 : Pour $Ra \approx 2.075 \times 10^8$, la dynamique T^1 subit également une bifurcation de Hopf secondaire. À l'image de celle subie par T_C^1 , cette bifurcation se traduit par l'apparition périodique de rouleaux dans les couches limites (Fig. 4.3 première ligne) à $\omega_p^{T^2} \approx 3.1$. Cette pulsation est en rapport incommensurable avec $\omega_e^{T^1}$. La dynamique résultante, nommée T^2 , est donc toroïdale. Cette dynamique, illustrée en Fig. 4.2a, possède la propriété S et correspond à la branche WA de la figure 2.12.

Les régimes T^0 , T^1 , T_C^1 , T^2 et T_C^2 constituent les 5 dynamiques jusqu'alors répertoriées dans l'écoulement. D'autres explorations ont été réalisées, pour des valeurs de Ra de l'ordre de 10^9 [80], valeur à laquelle l'écoulement considéré est turbulent (même en 2 dimensions).

2.8 Conclusion

Ce chapitre présente les résultats principaux des précédentes études sur l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$. Nous y avons introduit les trois paramètres adimensionnés du système :

le nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{g\beta\Delta\theta H^3}{\nu\kappa}, \quad (2.36)$$

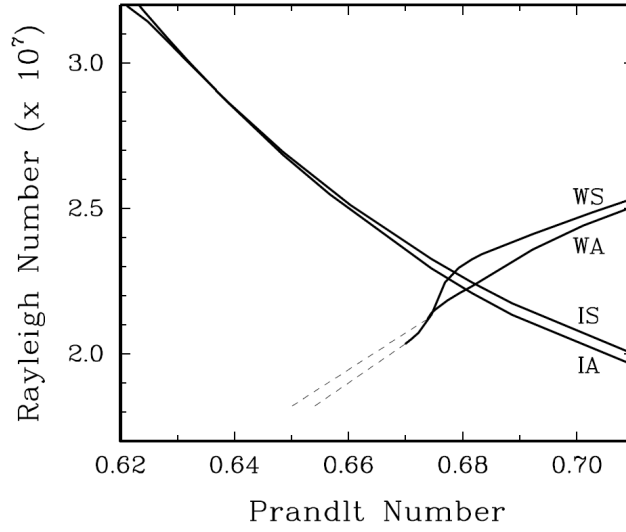


FIGURE 2.12 – Valeurs des premiers points de bifurcation en fonction de Ra et de Pr . Les courbes S correspondent aux bifurcations dans l'espace CS , les courbes A aux bifurcations en dehors de l'espace CS . Les courbes I ("Internal") correspondent aux oscillations des zones de détachements couplées à la propagation d'une onde interne dans le cœur stratifié (cas des dynamiques T^1 et T_C^1 dans notre étude). Les courbes W ("Wall") signifient l'instabilité de couches limites (cas des dynamiques T^2 et T_C^2 dans notre étude). Cette figure est extraite de [11] pour un rapport d'aspect $A = 2$. Le nombre de Rayleigh de cette étude est $Ra_L = \frac{g\beta L^3}{\nu\kappa}$, basé sur la largeur de la cavité. Un facteur 8 est à appliquer sur la valeurs données sur cette figure pour correspondre avec le nombre de Rayleigh défini dans notre étude. ([Retour au texte](#))

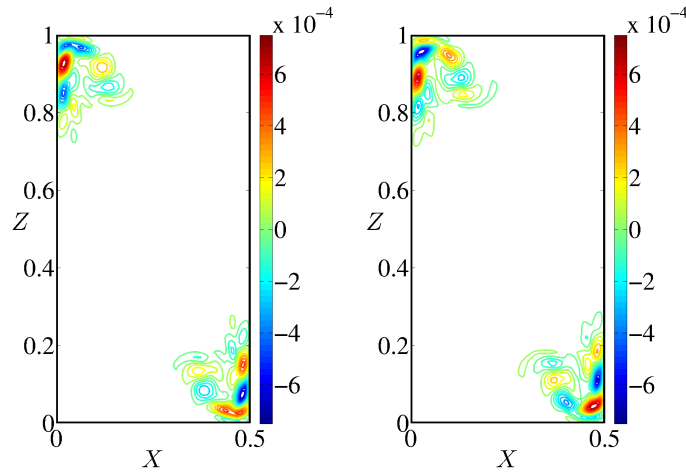


FIGURE 2.13 – Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation $\omega_p \approx 3.1$ du régime T_C^2 à $Ra = 2.1 \times 10^8$. Gauche : partie réelle (temps $t = 0[2\pi]$), droite : partie imaginaire (temps $t = -\pi/(2\omega_p)[2\pi]$). ([Retour au texte](#))

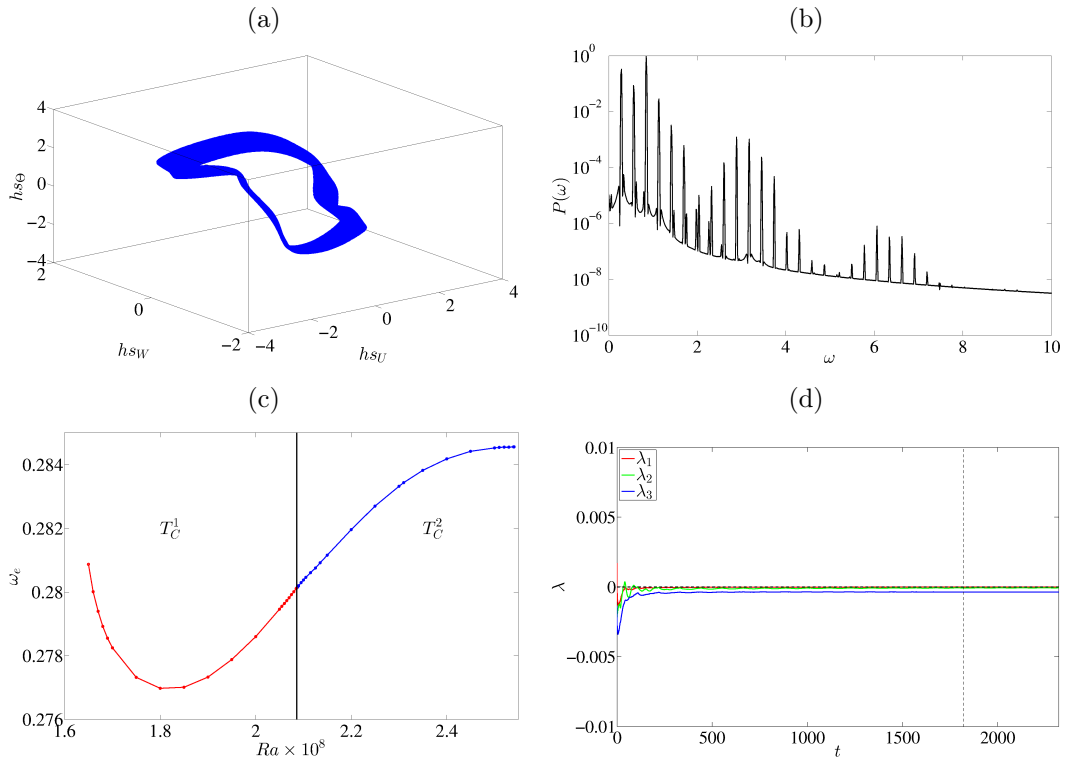


FIGURE 2.14 – (a) Dynamique CS obtenue après la bifurcation de Neimarck-Sacker pour $Ra = 2.3 \times 10^8$. (b) Spectre en puissance à partir de la variable d'énergie cinétique E_k pour $Ra = 2.3 \times 10^8$. (c) Évolution des pulsations $\omega_e^{T_C^2}$ avec Ra pour les régimes T_C^2 . (d) $\lambda_i = f(t), i = 1, 2, 3$. Les trois exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ pour $t_\lambda = 22$ à $Ra = 2.3 \times 10^8$. Les exposants de Lyapunov sont évalués sur à partir du temps indiqué en tirés noirs. ([Retour au texte](#))

le nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (2.37)$$

et le rapport d'aspect :

$$A = \frac{H}{L}. \quad (2.38)$$

Ces paramètres nous permettent d'obtenir les équations de Navier-Stokes adimensionnelles (2.21) utilisées pour simuler numériquement l'écoulement. En fixant $Pr = 0.71$ (cas de l'air) et $A = 2$ (cavité deux fois plus haute que large), nous avons établi que l'évolution de l'énergie cinétique adimensionnée E_k , lorsque l'écoulement est stationnaire, se sépare en deux régimes. Le premier considère le cas d'un écoulement diffusif (ou de couches limites non-séparées) où E_k varie comme Ra . Le second régime considère le cas d'un écoulement de couches limites séparées, et confinées le long des parois verticales de la cavité. Dans ce cas, nous avons établi que E_k varie comme $Ra^{-1/4}$. Nous avons montré que ces deux lois d'échelle se retrouvent numériquement dans l'écoulement (voir Fig. 2.3).

Nous avons retrouvé les résultats des précédentes études ([82], [11]) dans lesquelles sont établis les seuils de bifurcation de l'écoulement stationnaire : $T^0 \rightarrow T^1$, $T^0 \rightarrow T_C^1$ (instable). Une exploration fine en Ra et le calcul des exposants de Lyapunov nous montrent que T_C^1 devient stable pour $Ra \approx 1.64 \times 10^8$. Ce gain en stabilité suggère une bifurcation de la solution T_C^1 instable conduisant à l'apparition de T_C^1 stable et d'une solution Y instable séparant les solutions CS des solutions NCS . Ce nouveau scénario de bifurcation, proposé dans notre étude, est obtenu à partir de l'interprétation de la présence d'une bifurcation de codimension 2 présente pour $Pr \approx 0.64$ (voir Fig. 2.12).

Nous avons également retrouvé en détail les seuils suggérés par [11] pour l'apparition de deux solutions quasi-périodiques stables de l'écoulement (bifurcations $T^1 \rightarrow T^2$ et $T_C^1 \rightarrow T_C^2$).

Nous avons été en mesure de déterminer et de suivre la variation de la pulsation ω_e pour chacune des dynamiques instationnaire mentionnées dans ce chapitre. Nous avons montré que, avec Ra croissant, ω_e diminue et montre un minimum pour $Ra \approx 1.8 \times 10^8$ puis augmente et sature lorsque la dynamique de l'écoulement est quasi-périodique. Ces variations sont interprétées en termes d'effets d'amplitude finie d'une onde interne dans le cœur stratifié de la cavité.

Le chapitre 3 considère le cas du mélange de traceurs passifs pour l'écoulement périodique NCS T^1 . Dans ce chapitre, nous montrons que le mélange de traceurs passifs existe dès l'apparition de l'instationnarité mais de façon incomplète. Nous montrons également que le mélange, pour cette dynamique, peut être considéré comme complet avant la transition $T^1 \rightarrow T^2$.

Au chapitre 4, nous revoyons le scénario de transition au chaos pour l'écoulement. Dans ce chapitre, nous rapportons l'existence d'une vingtaine de dynamiques jusqu'alors non répertoriées avant l'apparition des dynamiques hyperchaotiques/turbulentes.

Route vers le chaos lagrangien

Dans ce chapitre, nous présentons l'étude sur le mélange de traceurs passifs dans l'écoulement de la cavité différentiellement chauffée $2D$, de rapport d'aspect $A = \text{hauteur}/\text{largeur} = 2$ et de nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ (Pr de l'air), présenté au chapitre 2.

Cette étude est réalisée en faisant varier le nombre de Rayleigh $Ra = g\beta\Delta\theta H^3/(\nu\kappa)$ (voir §2.8). Nous avons montré au chapitre 2 que l'écoulement stationnaire subit deux bifurcations de Hopf autour de $Ra \approx 1.6 \times 10^8$. L'une préserve la centro-symétrie de l'écoulement, l'autre non. La dynamique périodique de la branche non centro-symétrique (dynamique T^1 , voir §2.7) est étudiée dans ce chapitre du point de vue lagrangien pour caractériser et quantifier le mélange de traceurs passifs et non diffusifs. Nous montrons que le mélange peut être considéré comme complet avant l'apparition des dynamiques eulériennes quasi-périodiques T^2 (voir §2.7).

Sommaire

3.1	Introduction	23
3.2	Points fixes des écoulements bidimensionnels stationnaires	24
3.3	Points périodiques des écoulements $2D$, incompressibles et périodiques en temps	25
3.3.1	Indication de la présence d'orbites périodiques	26
3.3.2	Algorithmes d'identification de points périodiques	26
3.4	Mélange dans les écoulements bidimensionnels incompressibles	28
3.5	Méthodes numériques pour l'étude lagrangienne	30
3.6	Résultats (article scientifique)	31
3.7	Conclusion et perspectives	63

3.1 Introduction

Nous traitons dans ce chapitre du mélange de traceurs idéaux, de taille infinitésimale (force de Basset nulle) et n'interagissant pas avec l'écoulement fluide (traceurs passifs). Nous supposons également que ces traceurs ont une diffusion moléculaire nulle. Cette étude peut donc être vue comme la caractérisation du mélange du fluide avec lui même. Sous ces hypothèses, les traceurs obéissent à l'équation d'advection

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t), \quad (3.1)$$

où $\mathbf{X}(t)$ représente la position d'un traceur à un instant t donné, \mathbf{U} sa vitesse à la position \mathbf{X} et au temps t .

Considérons l'échelle de temps caractéristique de l'advection $t_{ad} \sim U/L$, où U et L représentent une vitesse et une longueur caractéristique du fluide. L'échelle de temps sur laquelle agit la diffusion est $t_{diff} \sim L^2/D$, D représente la diffusion moléculaire. Dans la limite où D est nulle, l'advection est alors le seul mécanisme responsable du mélange dans le système considéré.

Soit ν la viscosité cinématique du fluide. Nous pouvons définir un nombre de Schmidt $Sc = \nu/D$. Si D est nulle $Sc \rightarrow \infty$. Soit $\eta_c \sim Sc^{-1/2}$ la plus petite échelle de longueur agissant sur le champ de concentration du fluide (échelle de Batchelor, voir [8]). Si $Sc \rightarrow \infty$ alors $\eta_c \rightarrow 0$. Dans la limite non-diffusive, résoudre numériquement l'équation du champ de concentration requiert donc une discrétisation spatiale infinie. Dans ce cas, seule l'approche lagrangienne représentée par l'équation (3.1) est possible pour caractériser le mélange dans l'écoulement considéré. La notion de mélange ne correspond alors plus au sens usuel d'homogénéisation du champ de concentration et il convient de définir le système comme mélangeant si, en considérant deux sous-domaines I et J et m une mesure invariante du système, l'équation 3.1 vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m \left(I \cap \phi^t(J) \right) = m(I)m(J), \quad (3.2)$$

avec ϕ^t l'opérateur d'évolution temporelle.

En d'autres termes, si les particules sont initialement concentrées en I , après un temps suffisamment long, la concentration de particules en I est la même que celle en J . Dans ce cas, les particules initialement présentes en I ont été réparties de façon homogène, après un temps suffisamment long, dans I et J [78].

La propriété mélangeante implique que le système doit être ergodique et les trajectoires de particules chaotiques. On parle alors d'advection chaotique [4]. Le chaos, dans les systèmes dynamiques autonomes continus, n'est possible que si le système possède au moins trois dimensions (voir théorème de Poincaré-Bendixon [17]). Dans le cas des écoulements $2D$, l'espace physique dans lequel évoluent les traceurs se réduit à deux dimensions d'espace. Si l'écoulement est stationnaire, le mélange n'est donc pas possible. De fait, une condition nécessaire au mélange non diffusif dans les écoulements $2D$ est que l'écoulement soit instationnaire.

L'objectif de ce chapitre est de caractériser et quantifier le mélange dans l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$, à rapport d'aspect $A = 2$, $Pr = 0.71$. À notre connaissance, cette étude est la première à être réalisée dans le cas de cet écoulement. La première partie de ce chapitre, §3.2, est consacrée aux invariants lagrangiens (points fixes, variétés stables et instables) de l'écoulement stationnaire. Le §3.3 présente les invariants des écoulements $2D$ -périodiques, et donc instationnaires. Nous présentons de quelle manière les orbites périodiques instables contribuent à créer localement du chaos, et, dans notre cas, du mélange localisé. À l'inverse, nous montrons au §3.4 l'existence de frontières matérielles pour les particules, barrières imperméables qui ne peuvent être franchies par les traceurs et conduisent à l'existence d'un mélange local, mais globalement incomplet. Au §3.5 nous présentons les méthodes numériques utilisées pour assurer le suivi des traceurs dans l'écoulement. Nos résultats sur le mélange dans la cavité différentiellement chauffée $2D$ sont présentés sous la forme d'un article publié dans *Journal of Fluid Mechanics* en 2014, dont le plan est explicité au §3.6. Le §3.7 reprend certaines conclusions présentées dans l'article et ouvre d'autres perspectives à l'étude réalisée. Afin de ne pas alourdir la lecture de ce chapitre, les méthodes numériques sont détaillées en annexe B.

3.2 Points fixes des écoulements bidimensionnels stationnaires

Les points fixes des écoulements $2D$ stationnaires peuvent être soit des puits (points attirant la matière), des sources (points repoussant la matière), des centres (points marginalement stables) ou des points selles (points instables). Dans le cas d'un écoulement incompressible, du fait de la conservation de la masse, seuls les points centres et selles existent. Un point centre se distingue par le fait que toute particule initialement présente dans un voisinage ϵ arbitrairement proche du point fixe oscille autour sans s'en écarter ni s'en rapprocher exponentiellement. Ces points sont dit marginalement stables. À l'inverse, un point selle se définit par la présence d'une direction contractante (attractive) et d'une direction dilatante (répulsive) : toute particule initialement présente dans un voisinage ϵ du point selle est, au bout d'un temps suffisamment long, repoussé exponentiellement

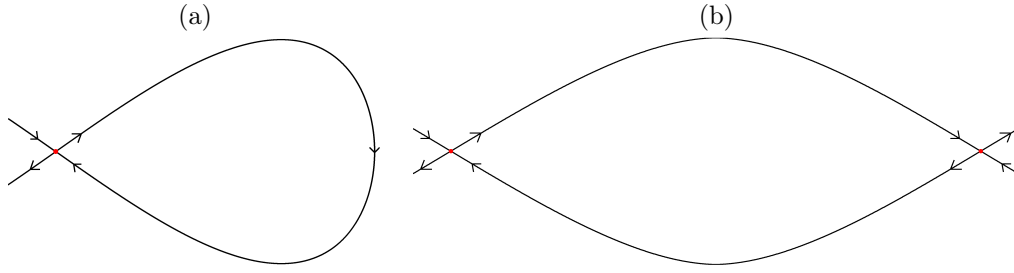


FIGURE 3.1 – Schéma d’une orbite (a) homocline et (b) hétérocline. Les points selle sont représentés en rouge. ([Retour au texte](#))

du voisinage de ce point.

Les points fixes structurent la dynamique lagrangienne. Dans un écoulement confiné incompressible $2D$ stationnaire, les variétés stables et instables (directions stables et instables) des points selles peuvent soit constituer une connexion homocline (cas où la variété instable du point se rattache à sa variété stable), soit hétérocline (la variété instable du point reconnecte à la variété stable d’une autre point selle). Ces deux cas de figure sont illustrés sur la fig. 3.1.

3.3 Points périodiques des écoulements $2D$, incompressibles et périodiques en temps

Si le champ de vitesse d’un écoulement incompressible $2D$ confiné devient périodique en temps, alors il peut exister des trajectoires de particules fermées dont la période est un multiple entier n de celle du champ de vitesse. En définissant une section stroboscopique Π (voir annexe B.1) basée sur la période du champ de vitesse, ces orbites s’expriment dans Π comme un ensemble discret de points périodiques. Le nombre de points représentés dans Π correspond alors à la valeur de n . La position de ces points varie le long de l’orbite fermée suivant le choix de la phase du champ de vitesse à laquelle est défini Π .

À l’image des points fixes de l’écoulement stationnaire, ces orbites périodiques peuvent être soit marginalement stables, soit instables. Ces propriétés de stabilité se retrouvent pour chacun des points périodiques composant l’orbite dans Π . Dans Π , un point périodique est donc soit de type centre (ou elliptique), soit de type selle (ou hyperbolique).

La nature centre ou selle d’un point fixe/périodique peut être identifiée en linéarisant la dynamique autour du point. Les valeurs propres de la matrice de monodromie (dans le cas d’écoulement $2D$, une matrice 2×2 dans Π) sont complexes conjuguées si le point est un point centre. Pour un point selle, l’une des deux valeurs propres est de module supérieur à 1, l’autre de module inférieur à 1. L’écoulement étant incompressible, le produit de ces deux valeurs propres doit idéalement être de 1.

Les variétés stables et instables des points périodiques selles sont estimées numériquement en plaçant un disque de particules autour du point périodique dans Π . Ce disque est ensuite itéré en avant dans Π pour décrire la variété instable du point, et itéré en arrière dans Π pour décrire la variété stable du point.

Lorsque le point périodique identifié est un point selle, ses variétés stables et instables peuvent s’intersecter transversalement. Dans ce cas, une particule initialement placée à l’exact point d’intersection des variétés stables et instables doit, par conservation des aires, être située sur une intersection de variété à l’itération suivante/précédente dans Π . Or, si une particule se situe exactement sur la variété stable d’un point périodique, il lui faut un temps infini pour atteindre ce point. Il en résulte que, si au moins une intersection de variétés est présente, alors une infinité d’intersections sont présentes. Ces intersections sont spatialement de plus en plus rapprochées à mesure

qu'elles sont proche du point périodique. Puisque l'écoulement est incompressible, chacun des lobes défini par une intersection des variétés possède la même aire que le lobe suivant/précédant. Les lobes existant entre deux croisements sont donc de plus en plus étirés à mesure qu'ils sont proches du point périodique. Les lobes constituent des zones dans laquelle la dynamique est chaotique et les particules présentes dans un lobe sont transportées au lobe suivant à chaque itération dans Π . Ce phénomène est connu sous le nom d'enchevêtrement homo/hétérocline et ces enchevêtrements constituent des zones de mélange (voir [68], [31], [5]).

Les figures 3.2a et 3.2b illustrent les intersections de variétés pour deux points périodiques de l'écoulement de cavité différentiellement chauffée périodique en temps (voir chapitre 2). Les variétés stables et instables des points périodiques sont identifiées en représentant l'éclatement d'un disque de particules, initialement placé dans le voisinage des points périodiques, à temps court dans Π . À temps long, il n'est plus attendu que les traceurs initialement placés sur le disque approximent correctement les variétés stables et instables des points périodiques (figures 3.2c et d). Nous observons que les traceurs se répartissent dans une zone bornée de la cavité. Cette observation suggère l'existence de barrières au mélange. Ces frontières sont décrites au §3.4.

3.3.1 Indication de la présence d'orbites périodiques

Par les enchevêtrements homoclines et hétéroclines, les orbites périodiques instables structurent le mélange dans l'écoulement. Il nous faut les identifier afin de pouvoir caractériser le mélange. L'un des outils suggérant la présence d'orbites périodiques dans l'écoulement est le graphe/carte/diagramme de récurrence [77], [52]. Cet outil consiste à représenter la distance N' séparant la position d'un traceur $\mathbf{X}(t_0)$ à l'instant t_0 de sa position à l'instant $t_0 + \tau$:

$$N'(t_0, \tau) := \|\mathbf{X}(t_0 + \tau) - \mathbf{X}(t_0)\|. \quad (3.3)$$

On ne tient alors compte que des distances N' sous une certaine valeur seuil ϵ . Si $N'(t_0, \tau)$ approche 0 alors la particule est repassée proche de la position qu'elle occupait au temps t_0 . Dans ce cas, la particule peut avoir approché une orbite périodique de période τ . La position de la particule au temps t_0 constitue alors une bonne condition initiale pour les algorithmes d'identification d'orbites périodiques.

Afin de s'affranchir d'éventuelles trajectoires de particules soit trop lentes, soit ne parcourant pas une distance suffisante les séparant de leur condition initiale, nous normalisons la distance N' par le maximum des distances séparant la particule à l'instant t_0 de l'instant τ :

$$N(t_0, \tau) = \frac{\|\mathbf{X}(t_0 + \tau) - \mathbf{X}(t_0)\|}{\max_t \|\mathbf{X}(t \in [t_0, t_0 + \tau]) - \mathbf{X}(t_0)\|}. \quad (3.4)$$

Dans le cas d'un champ de vitesse de période T_0 , τ prend des valeurs entières n correspondant au nombre de périodes du champ de vitesse. Quelques cartes de récurrences sont présentées sur la figure 3.3 dans le cas d'une particule et sur la figure 3.4 dans le cas de plusieurs particules pour l'écoulement de cavité différentiellement chauffée 2D périodique. Les zones indiquées en bleu sur les figures 3.3b et 3.4 suggèrent que les particules sont repassées proche de leur position à l'instant $\mathbf{X}(t_0)$. Ces positions font de bons candidats pour détecter la présence d'orbites périodiques instables (voir §3.3.2).

3.3.2 Algorithmes d'identification de points périodiques

L'identification des points fixes/périodiques est réalisée dans Π par deux algorithmes distincts. Le premier est un algorithme de Newton-Raphson étendu à deux dimensions. Le second est un algorithme de dichotomie bidimensionnelle développé durant la thèse. Ces deux algorithmes sont décrit en annexe B.2.3. Dans chacun des cas, les points périodiques sont considérés identifiés si la norme :

$$G = \|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\| < 10^{-10}, \quad (3.5)$$

où k indique l'itération pour laquelle est estimée la position \mathbf{X} du point fixe/périodique.

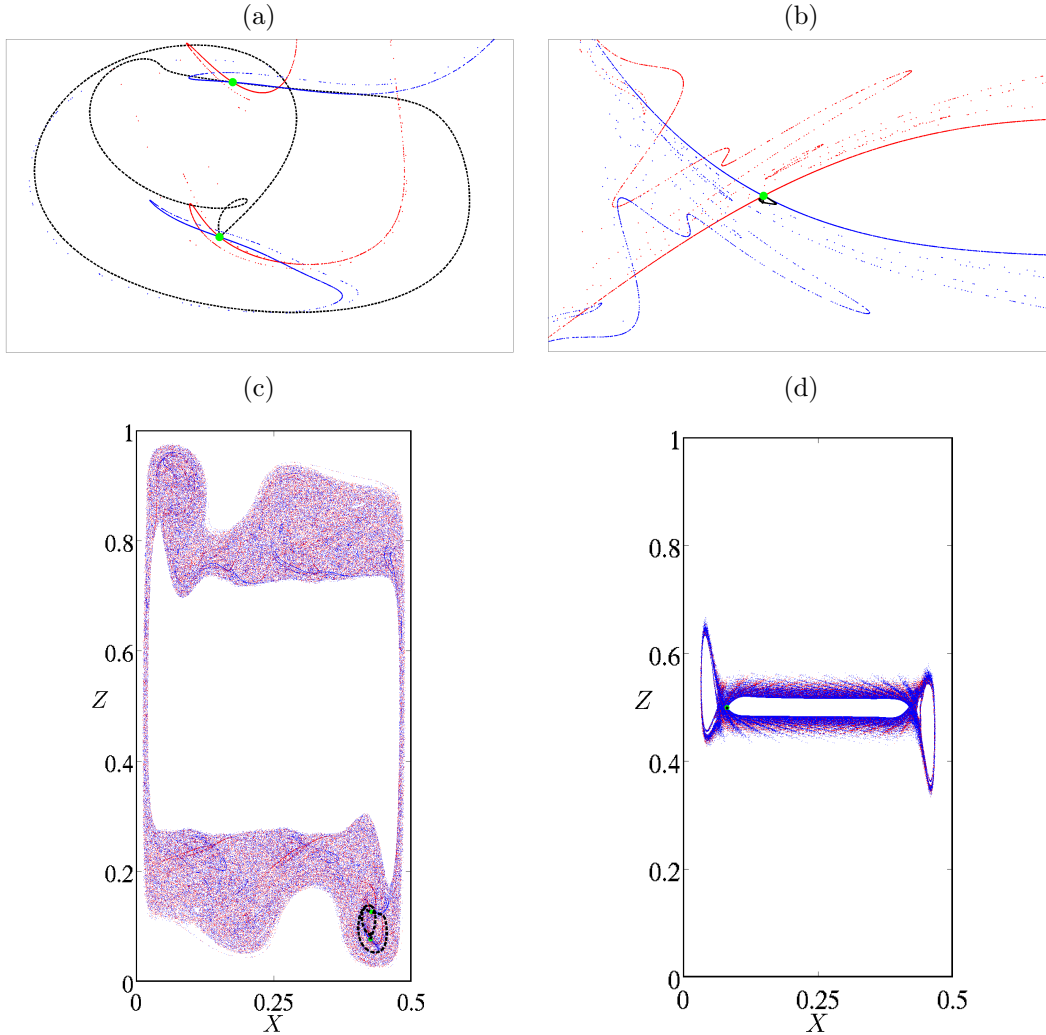


FIGURE 3.2 – Exemple de deux orbites périodiques instables de l'écoulement de cavité différentiellement chauffée 2D pour une dynamique T^1 à $Ra = 1.625 \times 10^8$. L'orbite (pointillé noirs) se représente par ses points périodiques (points verts) dans la section stroboscopique Π . Ses variétés stable (bleu) et instable (rouge) sont estimées en représentant l'éclatement d'un disque de particules, initialement placé dans le voisinage d'un des points périodiques de l'orbite, à temps court dans Π . (a)-(b) Répartition des particules à temps court. Les particules approchent les variétés stables/instables des points périodiques. (c)-(d) Répartition des particules à temps longs. Les particules se répartissent dans des zones bornées de la cavité. ([Retour au texte](#))

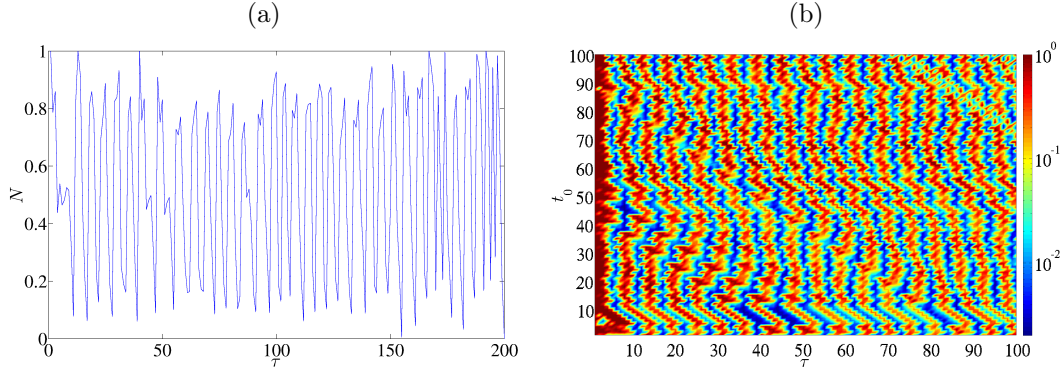


FIGURE 3.3 – Graphique de récurrence (voir eq. (3.4)) pour un traceur initialement placé en $(0.3722, 0.7545)$ dans la cavité différentiellement chauffée pour la dynamique T^1 (voir chapitre 2) à $Ra = 1.625 \times 10^8$. (a) $N = f(\tau)$ à t_0 fixé. (b) $N = f(t_0, \tau)$ pour t_0 et τ variable. ([Retour au texte](#))

3.4 Mélange dans les écoulements bidimensionnels incompressibles

Dans le cas d'un écoulement $2D$ incompressible, le système (3.1) peut se réécrire :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = + \frac{\partial \Psi(X, Z, t)}{\partial Z} \\ \frac{dZ(t)}{dt} = - \frac{\partial \Psi(X, Z, t)}{\partial X} \end{cases} \quad (3.6)$$

où $\Psi(X, Z, t)$ est la fonction de courant. Le système d'équations (3.6) est un système hamiltonien, où le hamiltonien du système est Ψ .

Si $\Psi = \Psi_0(X, Z)$ est indépendante du temps, alors les particules suivent les valeurs iso- Ψ_0 correspondant aux lignes de courant du système. Dans ce cas, le système hamiltonien est dit *intégrable* (voir [75], [17]) et les trajectoires de particules ne sont pas chaotiques.

Considérons le cas où Ψ dépend du temps et supposons, pour ε petit, que Ψ puisse s'écrire :

$$\Psi(X, Z, t) = \Psi_0(X, Z) + \varepsilon \Psi_P(X, Z, t), \quad (3.7)$$

avec $\Psi_P = \mathcal{O}(1)$ une fonction périodique de période T_P . Supposons une ligne de courant L de $\Psi_0(X, Z)$ de période T_1 , incommensurable avec T_P . Alors si T_1/T_P est suffisamment mal approximé par des rationnels de la forme p/q , $p, q \in \mathbb{N}^*$, L subsiste sous la forme d'une trajectoire toroïdale. Dans Π , ce tore devient une courbe fermée invariante, appelée tore KAM (pour Kolmogorov-Arnold-Moser). Ce tore ne possède ni direction contractante ni dilatante et agit comme une barrière imperméable pour les particules, et donc comme une barrière au mélange. À l'inverse, si T_1/T_P est suffisamment bien approximé par des rationnels, alors le tore résonne et peut subir une bifurcation nœud-col conduisant, dans Π , à l'apparition d'un nombre pair de points périodiques alternativement sous la forme d'un point hyperbolique et d'un point elliptique (aussi appelés points de Poincaré-Birkhoff). Les variétés stables et instables des points périodiques hyperboliques se connectent en formant des enchevêtrements hétéroclines, lesquels sont localement responsables de trajectoires de particules chaotiques comme discuté au §3.3. Les zones résonnantes correspondent donc à des zones de mélange localisées, comme illustré sur les figures 3.5a sous la forme d'un schéma et 3.5b dans le cas d'une orbite périodique identifiée pour l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$.

Le mélange est donc un compromis entre les structures agissant à son encontre (tores *KAM* non-résonants) et les enchevêtrements homo/hétéroclines formés par les variétés stables et instables

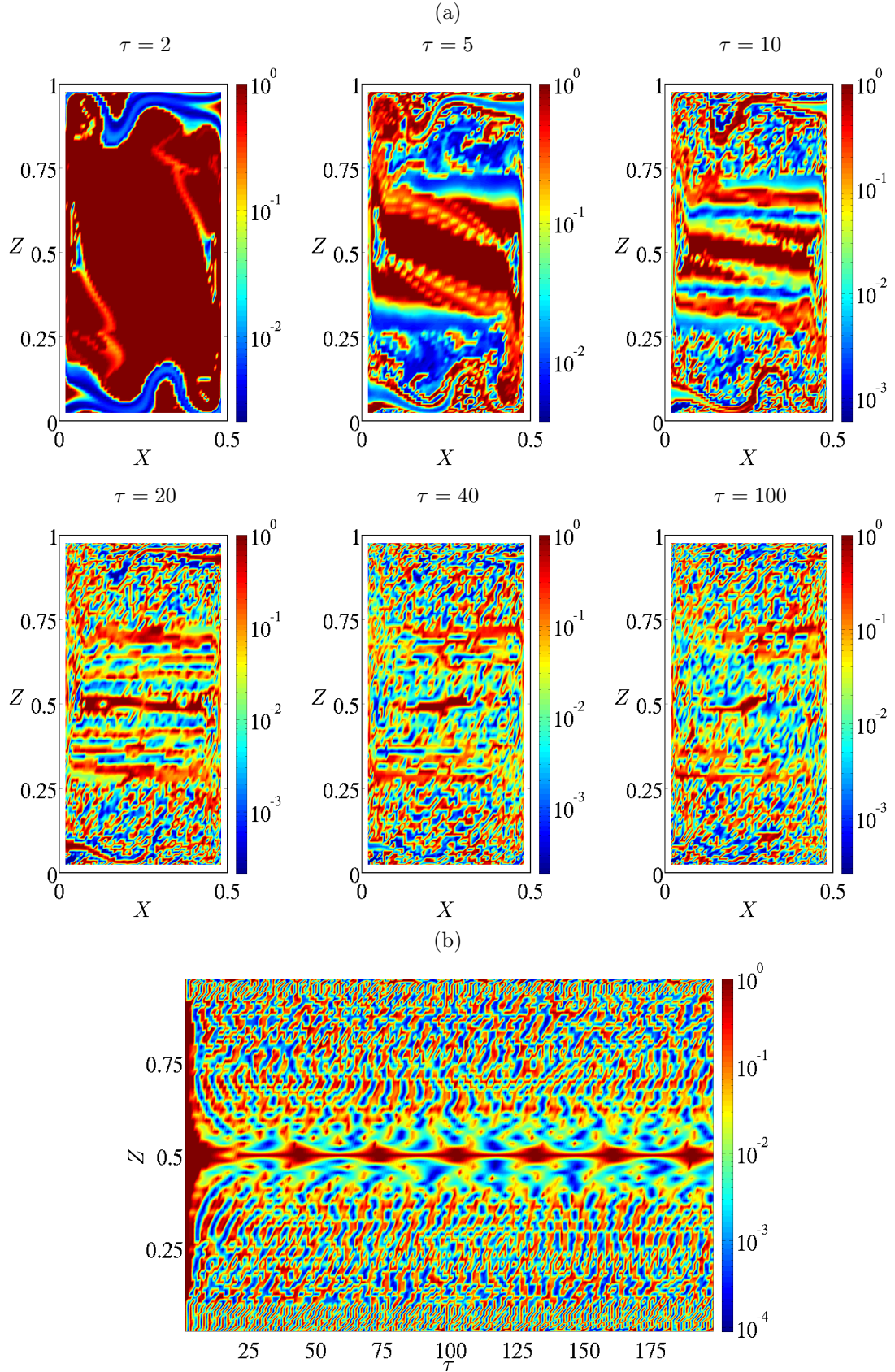


FIGURE 3.4 – (a) Cartes de récurrences (voir eq. (3.4)) pour une grille de condition initiale composées de 4941 particules réparties de façon non-homogène entre $X \in [0.190, 0.4810]$ et $Z \in [0.0245, 0.9755]$ à t_0 fixé. (b) Cas d'une ligne de particule répartie à $X = A/2$, $Z \in [0.0245, 0.9755]$, à t_0 fixé et τ variable. Ces cartes sont réalisées sur la dynamique T^1 à $Ra = 1.625 \times 10^8$ (voir chapitre 2). ([Retour au texte](#))

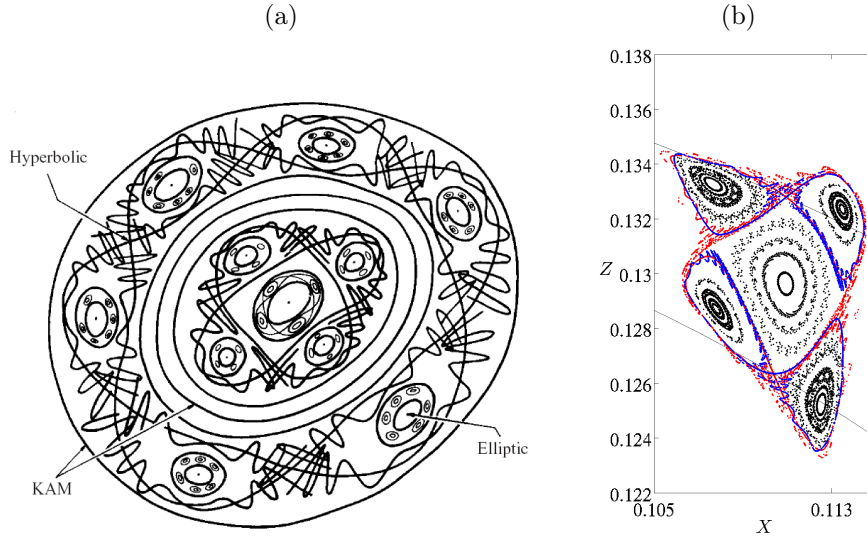


FIGURE 3.5 – (a) Schéma d'une zone de mélange confinée. Les points périodiques sont alternativement hyperboliques (instables) et elliptiques (stables). Les variétés stables et instables issues des points hyperboliques se croisent transversalement et forment des enchevêtrements hétéroclines. Les courbes *KAM* correspondent aux tores agissant en tant que barrières au mélange. Cette image est extraite de [60]. (b) Orbite périodique instable (courbe noire) correspondant à un tore *KAM* résonant. Les variétés stables (bleu) et instables (rouge) issues des points hyperboliques se croisent en formant des enchevêtrements hétéroclines. Le mélange associé à cette orbite est confiné par la présence de tores *KAM* n'ayant pas encore résonné (courbes dessinées par les points noirs). Cette orbite est obtenue pour une dynamique eulérienne T^1 à $Ra = 1.625 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

des points périodiques. Il résulte alors un ensemble de structures dont la complexité est illustrée sur la figure 3.6b. Nous voyons sur cette figure que la répartition des particules dans la cavité est bornée par la présence de tores non-résonants (voir fig. 3.6a). Sur la figure 3.6b, nous observons l'existence d'un ensemble de tores *KAM* agissant comme des barrières au mélange à plusieurs échelles spatiales différentes.

3.5 Méthodes numériques pour l'étude lagrangienne

Le suivi en temps des traceurs est réalisé par une méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 pour un pas de temps d'intégration $\Delta t = 10^{-3}$ (correspondant au pas de temps sur lesquels sont calculés les champs de vitesse). Le choix de cette méthode numérique est détaillé en annexe B.2.1. Nous montrons dans cette annexe que le choix de ce schéma semble, dans le cas de notre étude, plus judicieux qu'une méthode d'intégration symplectique.

L'étude porte sur le mélange dans la dynamique périodique T^1 présentée au chapitre 2. Les champs de vitesses sont extraits sur une période de la dynamique. Les traceurs sont ensuite itérés en temps à partir de ces champs de vitesse. Suivant l'adimensionnement (voir chapitre 2), la période du champ de vitesse T_0 n'a, *a priori*, aucune raison d'être un multiple entier du pas de temps utilisé dans la *DNS*. Le dernier pas de temps composant T_0 est approximé à partir de la fermeture de la composante U du champ de vitesse par une interpolation polynomiale d'ordre 5.

Le champ de vitesse \mathbf{U} n'étant connu que sur un nombre fini de points, nous interpolons la valeur des vitesses pour chaque traceurs par une interpolation 2D de type Chebyshev (voir annexe B.2.2). Cette méthode a été choisie comme un bon compromis entre vitesse de calcul et précision numérique.

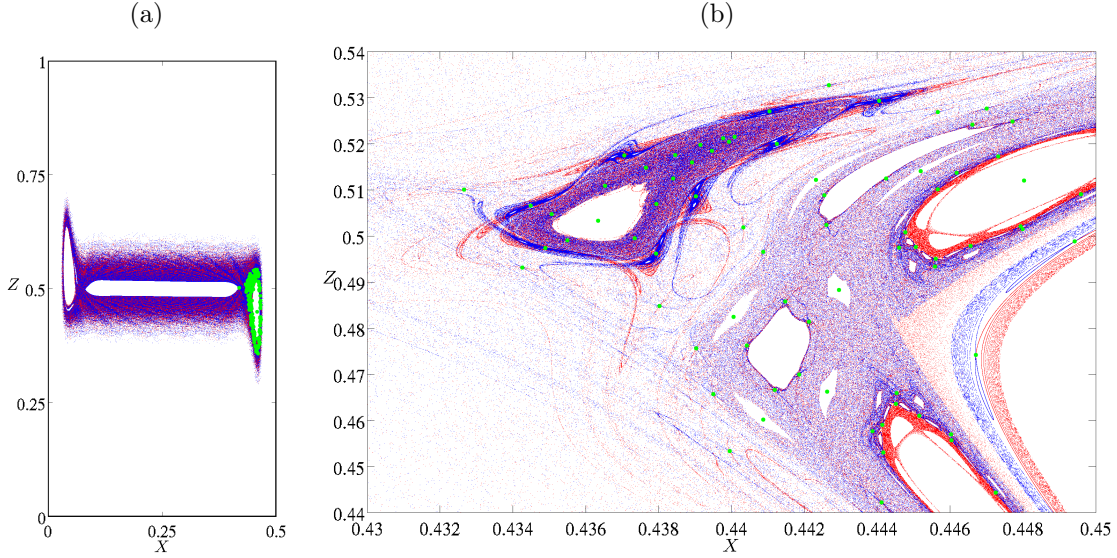


FIGURE 3.6 – Points périodiques (vert) et répartition à temps long d’un disque de particules placé autour de chacun des points périodiques. Le disque est itéré en avant (rouge) et en arrière (bleu). Les zones blanches correspondent à des zones non visitées par les traceurs. A temps court, les particules bleues et rouges décrivent respectivement les variétés stables et instables du point périodique. Ces points périodiques sont obtenus pour la dynamique eulérienne T^1 à $Ra = 1.625 \times 10^8$ (voir chapitre 2). (a) Région de la cavité dans laquelle est confinée le mélange. (b) Zoom autour des points périodiques. ([Retour au texte](#))

3.6 Résultats (article scientifique)

Nos résultats sont présentés sous la forme d’un article publié dans la revue *Journal of Fluid Mechanics* [59]. En partie 2 de cet article, nous rappelons les principaux mécanismes conduisant à l’apparition des dynamiques périodiques de l’écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$. La partie 3 de l’article discute les méthodes numériques employées pour traiter le suivi des particules. Nous y discutons le cas des traceurs évoluant dans l’écoulement stationnaire. Un paragraphe de cette section est également dédié au cas des traceurs évoluant dans l’écoulement périodique T^1 . Dans la partie 4, nous définissons la section de stroboscopique Π utilisée dans l’étude ainsi que les outils numériques utilisés dans Π . Nous discutons également la déstabilisation des orbites homoclines et hétéroclines de l’écoulement stationnaire lorsque l’écoulement devient instationnaire. Cette partie considère les propriétés de mélange des points périodiques ainsi que le cas des tores non-résonnants. La partie 5 présente nos résultats sur le mélange vis à vis du nombre de Rayleigh Ra . Nous y présentons une méthode pour quantifier la fraction de chaos présente dans l’écoulement. Dans la partie 6, nous montrons que le mélange dans l’écoulement peut être considéré comme complet avant la transition aux dynamiques quasi-périodiques. Nos conclusions et perspectives à l’étude sont présentées dans la partie 7 de l’article.

Lagrangian chaos in confined two-dimensional oscillatory convection

L. OTESKI¹, Y. DUGUET¹ AND L. PASTUR¹

¹ LIMSI-CNRS, Université Paris Sud, UPR 3251, 91403 Orsay Cedex, France

(Received 3 November 2014)

The chaotic advection of passive tracers in a two-dimensional confined convection flow is addressed numerically near the onset of the oscillatory regime. We investigate here a differentially heated cavity with aspect ratio two and Prandtl number 0.71 for Rayleigh numbers around the first Hopf bifurcation. A scattering approach reveals different zones depending on whether the statistics of return times exhibit exponential or algebraic decay. Melnikov functions are computed and predict the appearance of the main mixing regions via the break-up of the homoclinic and heteroclinic orbits. The non-hyperbolic regions are characterised by a larger number of Kolmogorov-Arnold-Moser tori. Based on the numerical extraction of many unstable periodic orbits and their stable/unstable manifolds, we suggest a coarse-graining procedure to estimate numerically the spatial fraction of chaos inside the cavity as a function of the Rayleigh number. Mixing is almost complete before the first transition to quasi-periodicity takes place. The algebraic mixing rate is estimated for tracers released from a localised source near the hot wall.

1. Introduction

Transport and mixing inside a confined environment is of critical importance for many engineering processes. In particular, natural thermal convection is an efficient and non-intrusive way to induce unsteady motion inside a closed fluid container. Natural convection is therefore crucial for the spreading of pollutants or aerosols impurities in e.g. cooling devices, ventilation of building interiors or during the solidification of alloys. All transport mechanisms combine two different physical processes: advection and molecular diffusion. Advection acts on a timescale $t_{ad} \approx U/L$ while diffusion acts on a timescale $t_d \approx L^2/D$, where U and L are characteristic velocity and length scales and D is a typical diffusion coefficient. The case of non-diffusive mass transport corresponds to the limit $t_d/t_{ad} \rightarrow \infty$, with advection the only possible mechanism responsible for mixing. Defining the kinematic viscosity ν of the fluid, a Schmidt number Sc can be defined as $Sc = \nu/D$. The smallest relevant scale η_c of the concentration field scales as $Sc^{-1/2}$, thus in the non-diffusive limit $\eta_c \rightarrow 0$. Therefore, in this limit the concentration field can not be resolved using finite resolution. We will focus here on the advection of perfectly passive pointwise tracers advected by a fluid flow, neglecting molecular diffusion as well as drag, particle size effects and interaction between particles. Equivalently the tracers can be thought of as fluid particles whereas the fluid itself is seen as a continuum. Consequently, we turn our attention towards a Lagrangian description of the dynamics of individual tracers, see for instance Grigoriev and Schuster (2011), Aref *et al* (2014) for recent reviews on Lagrangian advection.

We focus in this study on the mixing of tracers by a prototype of natural convection

flow inside a closed cavity. In the presence of a non-zero temperature gradient between two opposite vertical walls, the fluid is always in motion and there is no conductive state. The fluid rises near the hot wall and sinks along the cold wall, resulting in a recirculating flow around the cavity. Under the Boussinesq hypothesis, the flow is incompressible and will be investigated here numerically in a two-dimensional geometry. The two-dimensional configuration has been extensively investigated in tall or wide cavities (*e.g.* Paolucci and Chenoweth (1989), Ravi *et al* (1994), Xin and Le Quéré (1995), Le Quéré and Behnia (1998), Xin and Le Quéré (2006)), using different fluids such as air or liquid metals (Mercader *et al* (2004), Mercader *et al* (2005)), and has been the subject of several numerical benchmarks. The first bifurcations towards unsteadiness, as the Rayleigh number Ra increases, have been well studied in the literature (Burroughs *et al* (2002)). However, Lagrangian mixing in this prototype of closed convection has to our knowledge not been addressed yet. Since no analytical solution is available for this closed flow, this represents an interesting opportunity to test classical advection tools developed in the context of kinematic models. In practice we use direct numerical simulation (DNS) to generate the flow field on a finite grid at every time.

Mixing is considered *complete* if any initial blob of particles has been homogeneously dispersed, after a sufficiently long time, through the whole fluid domain. The mixing property implies that the system is ergodic and that particle trajectories are chaotic (Falkovich (2004)). More intuitively, the chaotic nature of mixing can be seen as a succession of stretching and folding events (see Ottino (1990), Sturman *et al* (2006)). The chaotic nature of the trajectories requires the associated dynamical system, if it is autonomous, to be at least three-dimensional. For two-dimensional trajectories, mixing requires the velocity field to be time-dependent. The onset of two-dimensional mixing is thus expected to occur after (or to coincide with) the onset of unsteadiness of the flow. The dynamical system picture of chaotic advection, based on the identification of invariant sets, has been pioneered by Aref (1984) and widely used in *e.g.* Rom-Kedar *et al* (1990), Ottino (1990) and Wiggins and Ottino (2004). The theory, in the case of unsteady two-dimensional flows, relies heavily on properties of non-integrable Hamiltonian systems, such as the presence of Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) tori acting as barriers against transport. The notion of invariant sets acting as material barriers has more recently been generalised to arbitrary unsteady flow fields via the concept of Lagrangian Coherent structures (see *e.g.* Peacock and Dabiri (2010) and references therein). A complementary interpretation of mixing as an example of chaotic scattering, based on the concept of chaotic saddle, has been suggested in the case of open flows (Jung *et al* (1993), Ziemniak *et al* (1994), Lai and Tél (2011)). It was shown that the scattering region responsible for the mixing of tracers is built around infinitely many (unstable) periodic trajectories.

Our main motivation is to characterise the emergence of mixing in the differentially heated cavity flow as the flow field becomes unsteady. The continuous evolution from partial to complete mixing is quantified using a box-counting procedure. More specifically, the oscillatory nature of the velocity field suggests the use of perturbative methods, such as Melnikov functions and resonance criteria. This represents an opportunity to test these methods beyond their restrictive expected range of validity. In the first part, a scattering approach is used to distinguish between the different mixing regions of the flow according to their statistical properties. The second part aims at identifying the invariant sets of the system, assigning to each of them a specific role in the mixing process. Identification of invariant sets is based on the extraction of many (unstable) periodic orbits, along with

their stable and unstable manifolds. The role of homoclinic and heteroclinic orbits, as well as that of toroidal trajectories, is specified in connection with the statistics deduced from the scattering approach. In the third part, we focus on one value of the control parameter Ra for which the time-periodic regime is closest to achieving complete mixing. In such a regime a quasi-homogeneous distribution of tracers can be obtained asymptotically by seeding the tracers initially from one single location. The homogenisation process is examined and described as a succession of several steps, the latter of which allows for an estimation of the rate of homogenisation (also called mixing rate).

The paper is organised as follows. In Section 2, we briefly recall the main results of previous studies of two-dimensional differentially heated cavities and describe the tools used for the numerical simulation of the cavity flow. The Lagrangian formulation of the problem is introduced in Section 3, where we extend the scattering approach to this closed system in order to highlight the regions of the flow most relevant for mixing. Section 4 is dedicated to the identification of the most important invariant sets in association with their mixing properties. Section 5 suggests a quantification of the fraction of chaos in the system vs. Ra . It suggests that the upper end of the oscillatory regime corresponds to almost complete mixing. We focus in Section 6 on the mixing induced by a localised source of tracers and verify the previous suggestion. The results and perspectives are eventually discussed in the concluding Section 7.

2. Eulerian approach

2.1. Description of the flow

A two-dimensional differentially heated cavity is a closed container whose two vertical walls are subject to different homogeneous temperatures. The temperature of the hot and cold walls are denoted by θ_h and θ_c , respectively (see Fig. 1). We refer to x and z as the horizontal and vertical directions, respectively. The origin of the system $(x, z) = (0, 0)$ is set as the bottom left corner of the cavity. The gravity g is parallel to the heated walls and points downwards in the z -direction. This system is characterised by its height H and width W , and the aspect ratio of the cavity is defined as $A = H/W$. The difference in temperature between the hot and the cold wall is defined as $\Delta\theta = \theta_h - \theta_c$.

Following the classical Boussinesq hypothesis, we assume that the thermophysical coefficients of the fluid are constant except for the density in the buoyancy force, which expands as

$$\rho(\theta) = \rho_0[1 - \beta(\theta - \theta_0)], \quad (2.1)$$

where $\theta_0 = (\theta_h + \theta_c)/2$ and $\rho_0 = \text{const.}$ Defining κ as the thermal diffusivity of the fluid, ν as the kinematic viscosity and β as the thermal expansion coefficient, a Rayleigh number based on the cavity height is defined as

$$Ra = \frac{g\beta\Delta\theta H^3}{\nu\kappa}, \quad (2.2)$$

and the Prandtl number as $Pr = \nu/\kappa$.

Following the nomenclature in Xin and Le Quéré (2006), the reference length is chosen as H , the reference velocity as $V_{ref} = \kappa Ra^{1/2}/H$ and the reference pressure as $P_{ref} = \rho_0 V_{ref}^2 \nu / \kappa = \rho_0 g \beta \Delta\theta H$. The convective time unit is defined by $t_{conv} = L_{ref}/V_{ref} = H^2/(\kappa Ra^{0.5})$. We use a reduced dimensionless temperature $\Theta = (\theta - \theta_0)/\Delta\theta$. Using dimensionless variables \mathbf{U} for the velocity field, P for the pressure, Θ for the temperature,

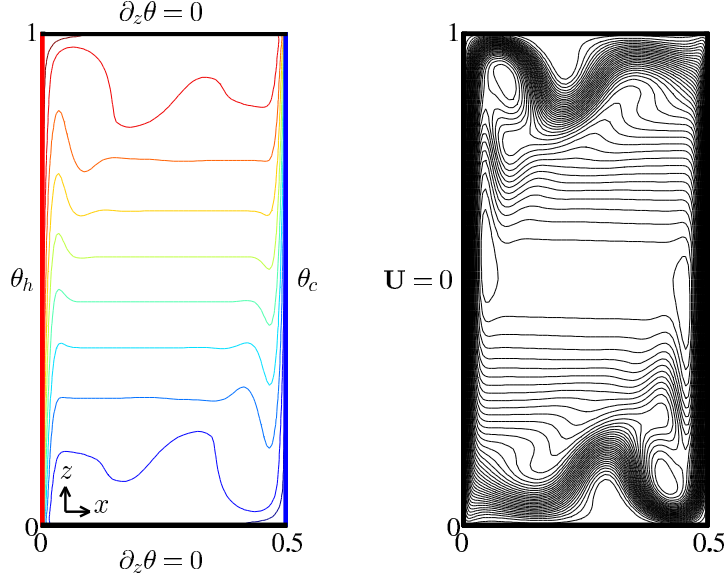


FIGURE 1. The differentially heated cavity with geometrical aspect ratio $A = 2$ for the steady state at $Ra = 10^8$. Left: iso-values of the temperature field θ from hot (black, red online) to cold (black, blue online). Right: streamlines. Boundary conditions for the velocity are $\mathbf{U} = 0$ at each walls. Gravity points downwards in the z -direction.

X for the horizontal direction and Z for the vertical direction, the Navier-Stokes equations read:

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = Pr(-\nabla P + Ra^{-1/2} \nabla^2 \mathbf{U}) + \Theta \mathbf{e}_z, \quad (2.3)$$

$$\partial_t \Theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta = Ra^{-1/2} \nabla^2 \Theta, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (2.5)$$

Boundary conditions for the temperature are set as adiabatic for the two horizontal walls (Neumann conditions) and isothermal (Dirichlet conditions) for each vertical wall:

$$\begin{aligned} \Theta(0, Z) &= 0.5 = -\Theta(1/A, Z) \\ \partial_Z \Theta(X, 0) &= 0 = \partial_Z \Theta(X, 1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

The velocity field obeys the no-slip condition $\mathbf{U} = 0$ at all walls. The bounded fluid domain defined by the cavity is referred to as $\mathcal{D} = \{\mathbf{X} = (X, Z), X \in [0, A^{-1}], Z \in [0, 1]\}$. For this study we fix $Pr = 0.71$, which corresponds to air, and $A = 2$. The Rayleigh number Ra is the only control parameter in our study.

2.2. Numerical method

Direct Numerical Simulation (DNS) was performed using a code written by S. Xin and P. Le Quéré. It is based on a pseudo-spectral Chebyshev collocation method for the spatial discretisation and a direct Uzawa method for the velocity-pressure coupling. The time-stepping algorithm combines a second-order Adams-Bashforth extrapolation for the convective terms with a second-order Backward Differentiation Formula for the linear ones. The resulting Helmholtz equations are solved by full diagonalisation of the second-order partial derivatives. Based on previous works, for all Ra values presented in this paper, we used 81 and 101 collocation points in the X and Z directions, respectively, with a timestep of $\Delta t = 10^{-3}$. This resolution is sufficient to accurately predict the first Hopf bifurcations of the system (Xin and Le Quéré (2006)). Accurate convergence

towards steady states below and beyond Ra_c (where the steady state is unstable) is achieved using the Selective Frequency Damping algorithm (Åkervik *et al* (2006))), with the convergence criterion $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)\|_\infty < 10^{-10}$ and $\mathbf{u} = (U, W, \Theta, P)$.

2.3. Steady base flow

Due to buoyancy, fluid rises along the hot wall and sinks along the cold wall irrespectively of the value of Ra . As Ra increases, vertical boundary layers narrow while a homogeneous stratification appears in the core of the cavity for $Ra \gtrsim 10^6$. At $Ra \approx 10^7$ detached recirculations form in the vicinity of two of the cavity corners. Additionally, for all times the base flow \mathbf{u} respects the Z_2 inversion symmetry

$$\mathbf{u}(R\mathbf{X}, t) = \zeta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (2.7)$$

where the operators R and ζ are defined by

$$\begin{aligned} R : (X, Z) &\rightarrow (1/A - X, 1 - Z), & R^2 &= I \\ \zeta : (U, W, \Theta, P) &\rightarrow (-U, -W, -\Theta, P), & \zeta^2 &= I. \end{aligned} \quad (2.8)$$

The base flow is shown in Fig. 1 for $Ra = 10^8$. The stratified core of the base flow supports internal gravity waves. The relaxation time of the least damped internal waves varies as $0.1 \times Ra^{1/2}$, which is typically 10^3 convective time units for $Ra \approx 10^8$ (Le Quéré and Behnia (1998)).

2.4. Onset of unsteadiness

The first Hopf bifurcation of the Eulerian system occurs at $Ra_c = 1.5865 \times 10^8$ (Xin and Le Quéré (2006)). The bifurcated state exhibits oscillations of the two detached areas in phase opposition, together with an internal mode oscillating less vigorously in the core of the cavity. It is characterised by an angular frequency $\omega_0 = 2\pi/T_0 \simeq 0.28225$, with the period T_0 only weakly varying with Ra . Four different phases $\Phi = 2\pi t/T_0|_{[2\pi]}$ of the corresponding global mode are shown in Fig. 2 for $Ra = 1.6 \times 10^8$. As reported in Burroughs *et al* (2002), the corresponding solution $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ of the linearised problem exhibits the anti-symmetry property

$$\mathbf{v}(R\mathbf{X}, t) = \zeta \mathbf{v}(\mathbf{X}, t + \pi/\omega_0) \quad (2.9)$$

while the full nonlinear field does not (Le Quéré and Behnia (1998)). For $Ra \simeq 2.07 \times 10^8$, the time-periodic state along this branch undergoes a secondary Hopf bifurcation. The new bifurcated state is characterised by the additional propagation of rolls confined to the vertical boundary layers, with an angular frequency $\omega_2 \simeq 3.0919$. The resulting regime is quasiperiodic in time and will not be investigated here. We however report the value of Ra at which it bifurcates since it marks the upper limit in Ra of the time-periodic regime.

3. Dynamics of tracers

3.1. Particle tracking: numerical method

Our Lagrangian approach is based on post-processing the velocity field obtained from the DNS computations. Whereas only one velocity field needs to be stored in the steady regime, in the oscillatory regime the period T_0 is split into approximatively 2×10^4 snapshots. Usually, T_0 is *a priori* not an integer multiple of Δt , consequently, a 5^{th} order polynomial interpolation is performed to compute the last timestep of the period.

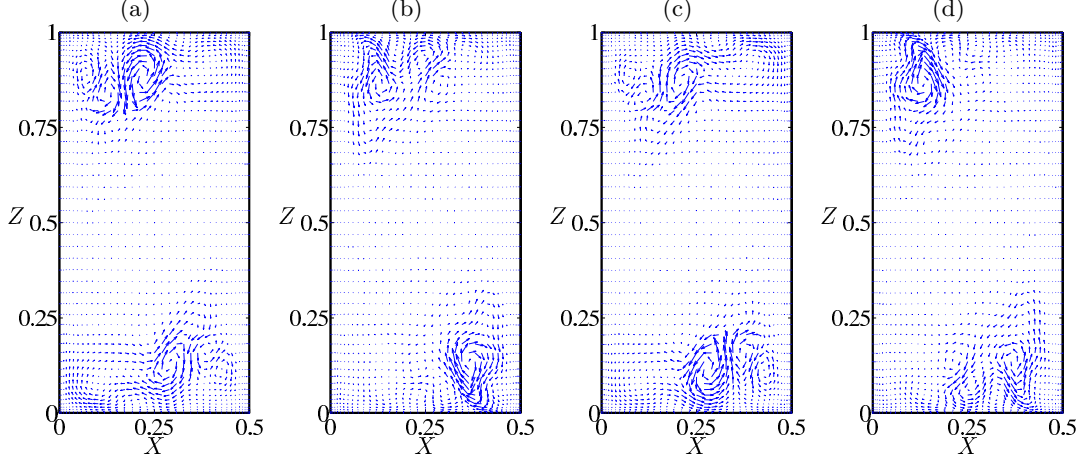


FIGURE 2. Departure from steady state of the velocity field for $Ra = 1.6 \times 10^8$. The steady state has been obtained with the SFD algorithm. (a) $t = T_0$. (b) $t = T_0 + T_0/4$. (c) $t = T_0 + 2T_0/4$ (d) $t = T_0 + 3T_0/4$.

In the Lagrangian formulation, the motion of a non-diffusive tracer is described by

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t), \quad (3.1)$$

where \mathbf{U} is the solution of Eq. (2.3). \mathbf{U} fields are extracted from DNS and 5th order Chebyshev polynomial interpolation is used to determine the velocity field \mathbf{U} at any arbitrary spatial location. Because of the post-processing approach, spatial interpolation leads to faster computations than a Galerkin evaluation of the velocity field. The position of the particle $\mathbf{X}(t)$ is updated using a 4th order Runge-Kutta scheme using as a timestep $\Delta t = 10^{-3}$ (identical to the timestep in the DNS). The accuracy of the scheme is assessed by quantifying the closure of streamlines in the steady regime for $Ra = 2.05 \times 10^8$. While streamlines should be closed periodic trajectories, with our parameters the average closure error is in practice below 5×10^{-7} and around 10^{-4} for streamlines around saddle points.

3.2. Tracers in steady velocity fields

In an incompressible two-dimensional flow, Eq. (3.1) combined with the divergence-free condition (2.5) leads to

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= \partial_Z \Psi(X, Z, t) \\ \dot{Z}(t) &= -\partial_X \Psi(X, Z, t) \end{cases} \quad (3.2)$$

where Ψ is the streamfunction. The system (3.2) has a Hamiltonian structure. When $\Psi = \Psi_0(X, Z)$ is time-independent, the system (3.2) is integrable. In this case, the trajectories of the tracers coincide with the isocontours of Ψ (*i.e.* streamlines) and chaotic advection does not occur.

We first focus on the topology of the steady velocity field displayed in Fig. 3, which is organised around the fixed points of \mathbf{U} . Streamlines originating from saddle fixed points of the velocity fields either form homoclinic loops, closing on the fixed point, or heteroclinic orbits connecting two different saddle fixed points together. Their period is infinite due to the slowing down in the vicinity of the fixed points. We identified in total five saddle fixed points (referred to as $\mathbf{X}_{S_i}, i = 1, \dots, 5$) and four centres (Fixed points of the

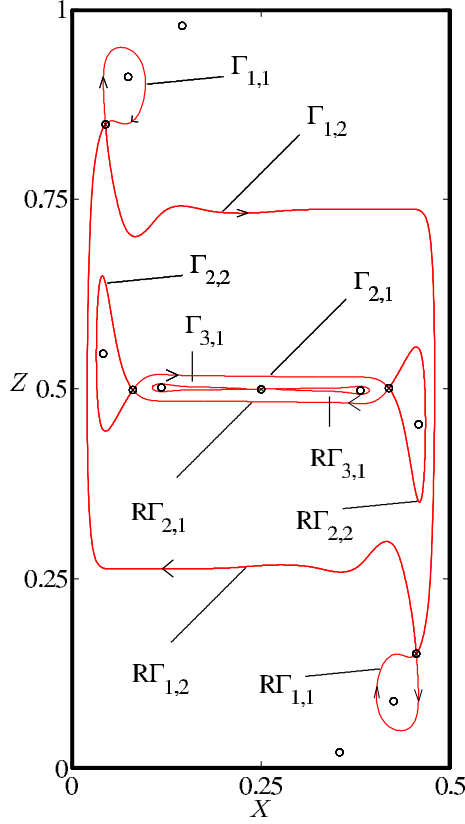


FIGURE 3. Homoclinic and heteroclinic connections of the (unstable) steady base flow for $Ra = 1.625 \times 10^8$. Filled circles: saddle points, open circles: centres.

steady velocity field were found using the algorithm described in the Appendix). Because of the centro-symmetry, $\mathbf{X}_{S_4} = R\mathbf{X}_{S_1}$ and $\mathbf{X}_{S_5} = R\mathbf{X}_{S_2}$. The three saddle points \mathbf{X}_{S_1} , \mathbf{X}_{S_2} and \mathbf{X}_{S_3} lie near the corner vortex, at mid-height of the cavity near the hot wall and at the geometrical center of the cavity, respectively. They are associated with three homoclinic and two heteroclinic connections. Those connections are referred to as $\Gamma_{i,j}$ where $i = 1, 2, 3$ is the label of the saddle point \mathbf{X}_{S_i} and $j = 1, 2$ refers to the direction considered in each unstable eigenspace.

For any initial condition \mathbf{X}_0 belonging to a closed streamline, we can define the period $T_{SL}(\mathbf{X}_0)$ of the corresponding orbit. A spatial distribution of T_{SL} is obtained by seeding at $t = 0$ the segment $\chi = \{X_0 \in]0, 1/(2A)], Z = 1/2\}$ with 10^5 tracers. Tracers are labelled by their initial horizontal position X_0 in χ . For each of them, Eq. (3.1) is integrated up to time T_{SL} after which the tracer has come back to its initial position. The distribution of T_{SL} versus X_0 is shown in Fig. 4 for $Ra = 1.625 \times 10^8$. It is smooth except for the presence of three singularities of T_{SL} (referred to as Sg_i , $i = 1, 2, 3$). Sg_1 is related to the no-slip at the wall whereas Sg_2 and Sg_3 are the signatures of the heteroclinic and homoclinic connections $R\Gamma_{1,2}$ and $\Gamma_{2,2}$, respectively. A last zone not displayed in Fig. 4 lies around \mathbf{X}_{S_3} , the geometrical centre of the cavity, and is bounded by the heteroclinic connections $\Gamma_{2,1}$ and $R\Gamma_{2,1}$. That zone features two homoclinic loops attached to \mathbf{X}_{S_3} . It is associated with large values of T_{SL} since the velocity magnitude is very weak.

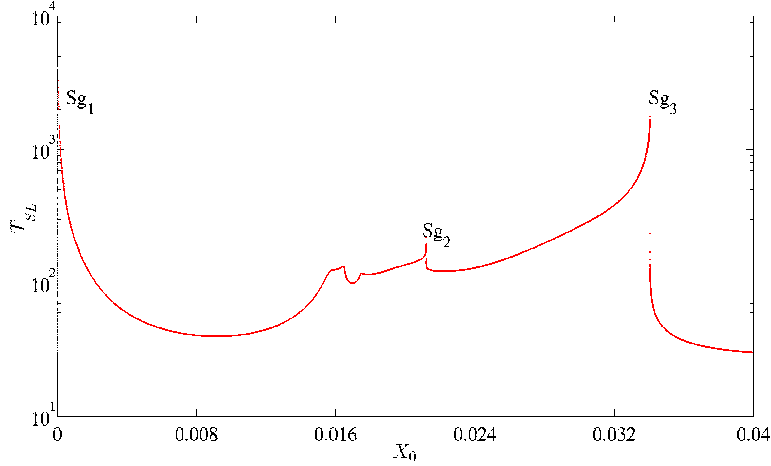


FIGURE 4. Distribution of return times for the (unstable) steady base flow $T_{SL}(X_0)$ for $Ra = 1.625 \times 10^8$ near the hot wall. The left divergence (Sg_1) is the signature of the non-slip boundary condition at the wall, whereas Sg_2 and Sg_3 are linked to a homoclinic or heteroclinic connection. Return times are computed by seeding the segment χ with approximatively 4×10^5 tracers.

3.3. Tracers in time-periodic velocity fields

Beyond the Hopf bifurcation, the dynamical system (3.1) becomes non-autonomous. Slightly above Ra_c , the steady streamfunction is perturbed by a small time-dependent term, *i.e.* $\Psi(X, Z, t) = \Psi_0(X, Z) + \varepsilon \delta \Psi(X, Z, t)$, with $\varepsilon \ll 1$. Due to time periodicity, $\delta \Psi(X, Z, t + T_0) = \delta \Psi(X, Z, t)$. Contrary to the steady case, here particles initially in χ are not expected to return exactly to their initial position. The mapping between the initial position and the position at the next crossing defines an input-output problem and can be seen as an example of *scattering process*. Such an approach is usually dedicated to open systems where particles leave the test domain never to return. The times of escape from the scatterer can be evaluated statistically in order to investigate, through the presence of fractal singularities, the properties of the underlying chaotic saddle (Lai and Tél (2011)). Chaotic saddles are built around an infinite set of periodic orbits around which particles can spend a long and arbitrary time before being ejected further downstream (Stolovitzky *et al* (1995), Neufeld and Tél (1998), Budyansky *et al* (2004), Biemond *et al* (2008)). While the concept of chaotic saddle does not necessarily make sense in a closed recirculating flow, we demonstrate here how the tools of chaotic scattering can shed light on the dynamics of tracers.

Return times are here computed for initial conditions on the segment χ , now using the unsteady velocity field $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$. However, since particle trajectories are no longer closed, except in the case of periodic orbits, the return time (now denoted T_P) is defined as the time required for a particle initially on χ to come back through χ with $\dot{Z} > 0$. Once back, the tracer provides a new initial condition from which a new return time can be extracted, and so forth until the next crossing. We record the return times associated with particles having crossed χ again at a phase Φ from an initial position X_0 . T_P is normalised by the return time T_{SL} of the particle originating from $(X_0, 1/2)$ in the steady regime. This normalisation avoids the divergences resulting from the walls and from the homoclinic/heteroclinic connections. Such a procedure has been applied up to the 40th return through χ for 10^4 particles. Fig. 5 shows the distribution of $\tau = T_P/T_{SL}$ as a

function of Φ and X_0 . Three seemingly fractal distributions of τ are found in the regions referred to as $A_i, i = 1, 2, 3$. They indicate the presence of chaotic scattering regions explored, be it transiently or not, by the tracers. A_1 corresponds to a region including the proximity of the walls. A_2 and A_3 correspond to the proximity of former homoclinic and heteroclinic loops $\Gamma_{1,j}$ and $\Gamma_{2,j}, j = 1, 2$. The regions A_i are delimited by intermediate regions with a smooth dependence on Φ and smooth variations of τ . Such regions are referred to as $N_i, i = 1, 2, 3$ in Figs. 5-6. The central zone around the center of the cavity is not treated here because of the huge return times associated with nearly vanishing velocities.

Fig. 7 shows the cumulative probability distributions $P(\tau > \tau_*)$ for the normalised return-time τ to be larger than a given value τ_* . Only events for which $\tau > 2$ are taken into account. Two possible asymptotic scalings can be expected for $P(\tau > \tau_*)$. An exponential decay of the form $P(\tau > \tau_*) \simeq e^{-\alpha\tau_*}$ would indicate *hyperbolic* scattering, while an algebraic decay of the form $P(\tau > \tau_*) \simeq \tau_*^{-\lambda}$ would indicate *non-hyperbolic* scattering (Ott and Tél (1993)). This distinction is crucial for a description of the long-time properties of the mixing process. Besides, it allows us to establish a classification of the different dynamics occurring in different spatial zones of the flow.

In the region A_1 , $P(\tau_*)$ scales algebraically, see Fig. 7a. This strongly suggests that the particles departing from A_1 are advected through an area where all invariant sets possess non-hyperbolic properties. The probability distribution in region A_2 almost perfectly fits an exponential decay (Fig. 7b). Therefore, we can expect the dynamics to be hyperbolic. Finally, $P(\tau_*)$ in region A_3 shows a mixed exponential/algebraic scaling (Fig. 7d). Since the algebraic fit is valid over a wider range of values of τ_* than the exponential one (see Fig. 7c), it suggests that A_3 is dominated by non-hyperbolic dynamics for larger times but still displays signs of near-hyperbolic dynamics on shorter timescales, at least for the observation times considered here. As we shall see next, hyperbolic properties of A_2 and A_3 are related to the breakdown of the homoclinic and heteroclinic loops $\Gamma_{i,j}$ in the unsteady regime, whereas non-hyperbolic properties are associated with the survival of *KAM* tori and to a lesser degree with the no-slip condition at the walls. The next section is devoted to an explanation of all these statistical properties from a deterministic point of view.

4. Properties of invariant sets

4.1. Definition of the stroboscopic section Π

Taking advantage of the time-periodicity of the flow field, the dynamics of the tracers can be studied using a stroboscopic map π transporting the position of any tracer in \mathcal{D} onto its position one period T_0 later. In this representation, Eq. (3.1) is reduced to an autonomous two-dimensional map $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ such that $\pi(\mathbf{X}_0) = \phi^{T_0}(\mathbf{X}_0)$, ϕ^{T_0} being the propagator over one period T_0 . We define the stroboscopic section of a given trajectory passing through \mathbf{X}_0 as $\Pi = \{\pi^n(\mathbf{X}_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Note that since the flow is incompressible, the continuous-time flow ϕ^t is area-preserving, hence the initial phase Φ of the velocity field can be chosen arbitrarily in $[0, 2\pi[$ to define Π . Furthermore, the harmonic forcing is not external but intrinsic to the flow since it is determined by the Hopf bifurcation occurring at $Ra = Ra_c$.

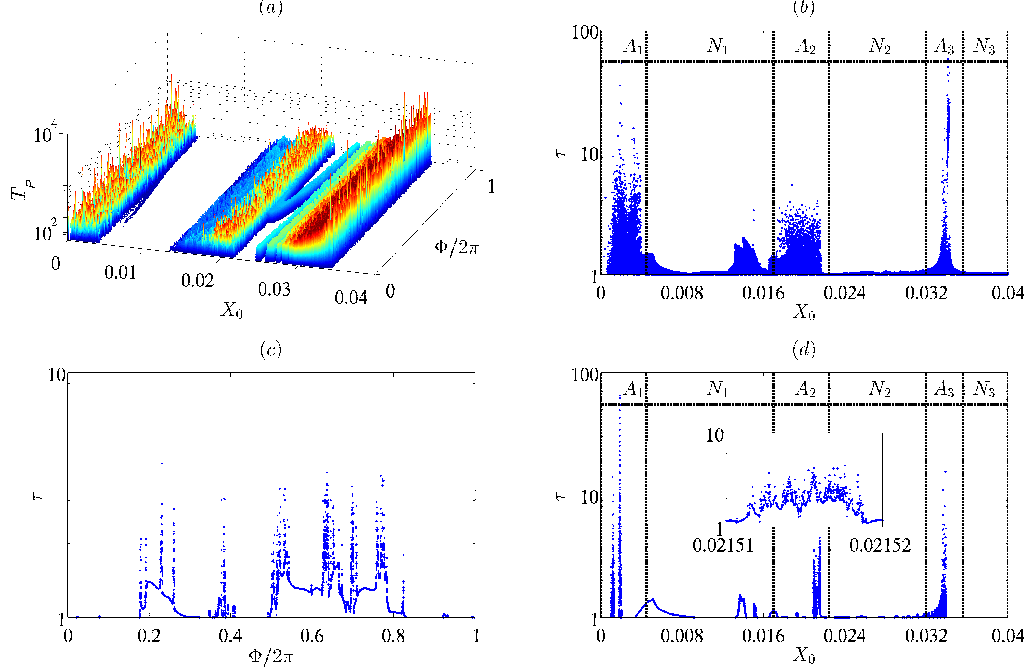


FIGURE 5. (a) Return times T_P as a function of X_0 and phase Φ , (b) projection on the $(X_0, \tau = T_P/T_{SL})$ plane, (c) cut through $X_0 = 0.02$ (area A_2), for varying Φ , (d) cut through $\Phi = 0$ for varying X_0 . Inset: zoom on the peaks in A_2 . The fractal distribution is obtained by seeding the segment $\{X \in [2.151 \times 10^{-2}, 2.152 \times 10^{-2}], Z = 1/2\}$ with 10^5 tracers. $Ra = 1.625 \times 10^8$.

4.2. Numerical tools in the stroboscopic section

An orbit crossing the stroboscopic section n times before returning to its original position defines n periodic points of period n in Π . The numerical identification of such periodic points is based on two numerical algorithms: a standard Newton-Raphson algorithm, and an alternative algorithm described in the Appendix. The convergence criterion for both algorithms is $\|\pi^n(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\|_\infty < 10^{-10}$. A Jacobian matrix is evaluated at order 1 by releasing two extra tracers in the neighbourhood of the reference periodic point and monitoring the separation versus time. Depending on the imaginary part of the spectrum of this matrix, we can distinguish whether the periodic point is a centre or a saddle. Therefore, eigenvalues are not expected to be accurate at all. However, it is expected that the nature of the identified periodic point (saddle or centre) will still be reflected in the imaginary part of the eigenvalues. Once an unstable periodic point is identified, a disk of radius 10^{-7} seeded with 100 tracers distributed on 10 concentric circles is placed around this point. Tracers are then tracked in Π in backward and forward time in order to highlight the stable and unstable manifolds of each hyperbolic point.

4.3. Destabilisation of homoclinic and heteroclinic connections

As long as the Lagrangian system is autonomous, the stable (W^s) and unstable (W^u) manifolds of a homoclinic saddle point \mathbf{X}_S coincide and form a homoclinic loop Γ . When subject to harmonic forcing, the saddle point becomes a periodic orbit, i.e. a periodic point \mathbf{X}_P in Π whose manifolds $W^u(\mathbf{X}_P)$ and $W^s(\mathbf{X}_P)$ no longer coincide. However, if they cross transversally at least once in Π it is known that they cross an infinite countable number of times (Poincaré (1892), Guckenheimer and Holmes (1983), Wiggins (1988)).

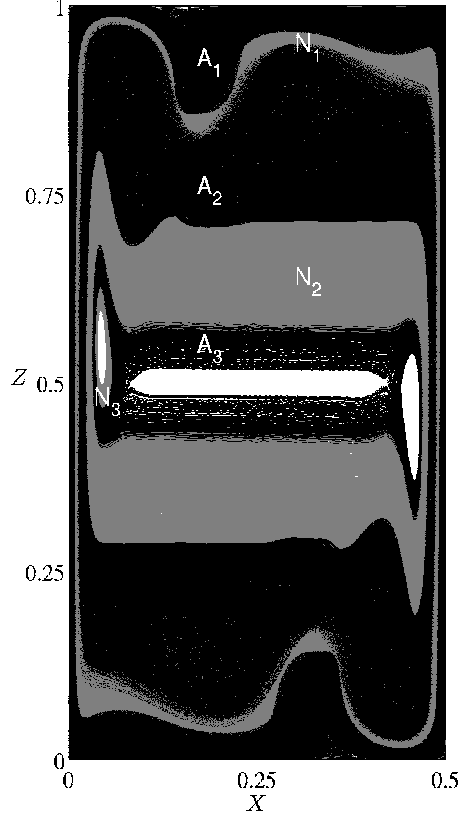


FIGURE 6. Trajectories inside the A_i areas (in black) associated with singularities in Fig. 5. N_i corresponds to the trajectories inside the non-hyperbolic areas (in grey). $i = 1, 2, 3$ and $Ra = 1.625 \times 10^8$.

This gives rise to a so-called homoclinic tangle consisting of an infinity of lobes of equal area. The conservation of the areas is a direct consequence of the Hamiltonian structure of Eq. (3.2) and implies a complex foliation of the lobes. Periodic points are dense in the chaotic region and the dynamics restrained to this area displays *hyperbolic mixing* properties. The transport from lobe to lobe is responsible for the mixing properties in the vicinity of the original homoclinic loop Γ (Ottino (1990), Rom-Kedar *et al* (1990)). This is illustrated in Fig. 8 where the manifolds are depicted over an observation time long enough to display a few transversal crossings. The same scenario is valid for the destabilisation of heteroclinic orbits.

Melnikov functions are a convenient tool to predict whether the stable and unstable manifolds of a periodic point cross each other or not (Melnikov (1963)). Such a function is proportional to the signed $O(\varepsilon)$ distance between the stable and unstable manifolds of the hyperbolic point:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \det[\mathbf{U}_0(\mathbf{X}_0(t)), \mathbf{U}_P(\mathbf{X}_0(t), t + t_0)] dt, \quad (4.1)$$

where \mathbf{U}_0 corresponds to the (unstable) steady velocity field evaluated along the homoclinic loop Γ , $\mathbf{X}_0(t)$ corresponds to a trajectory along Γ parametrised by time t , and \mathbf{U}_P is the finite-amplitude perturbation from \mathbf{U}_0 . If $M(t_0)$ vanishes for some isolated values

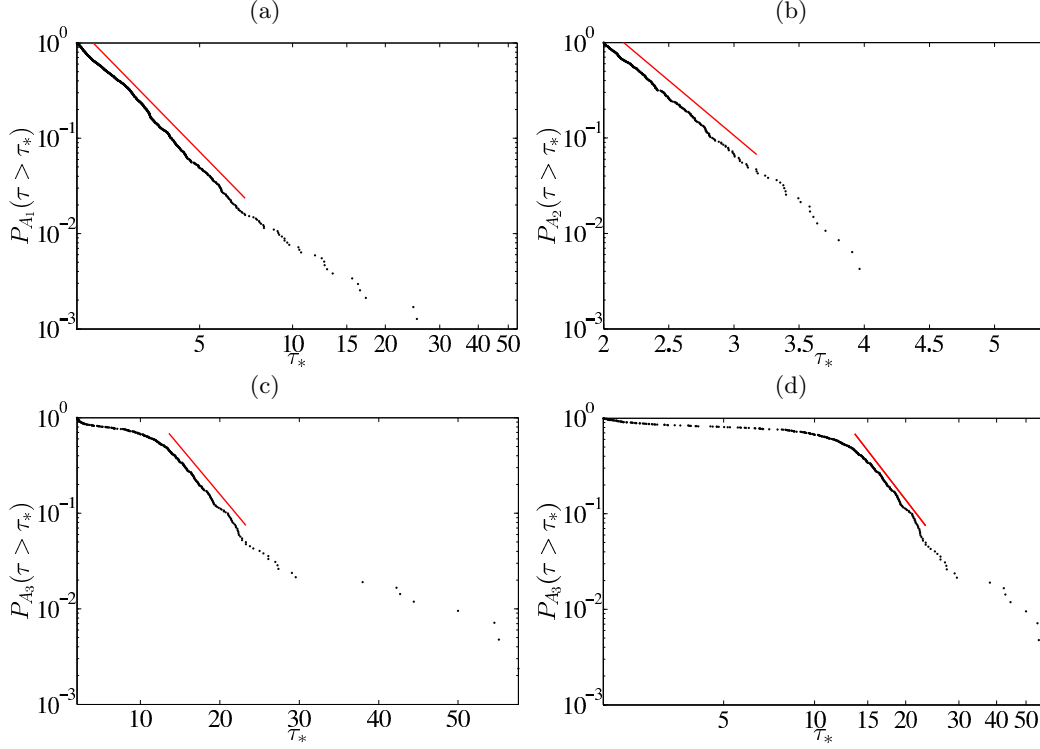


FIGURE 7. Cumulative probabilities $P(\tau > \tau_*)$ where $\tau = T_P/T_{SL}$ (see text) for different regions A_1, A_2, A_3 and $Ra = 1.625 \times 10^8$. (a) A_1 : algebraic fit with exponent $\lambda = 3.3$. (b) A_2 : Exponential fit with $\alpha = 1.15$. (c) A_3 : Exponential fit with $\alpha = 0.10$. (d): same as (c) in log-log plot, showing a better algebraic fit with $\lambda = 4.11$. The corresponding areas are shown in Fig. 5b and their representation in the physical space in Fig. 6.

of t_0 , the stable and unstable manifolds intersect transversally and a homoclinic tangle exists in the vicinity of Γ . The mass transport from lobe to lobe associated with the homoclinic tangle produces Lagrangian mixing. The integral of the unsigned Melnikov function provides a first order approximation of the area covered by the lobes (Rom-Kedar *et al* (1990), Hackborn *et al* (1997)).

The Melnikov function in Eq. (4.1) can be redefined as function of the phase variable $\Phi = 2\pi t_0/T_0 \in [0, 2\pi[$. In order to account for the variation of M with Ra , we furthermore consider the normalisation of the Melnikov function given by

$$\Lambda_{i,j}(\Phi) = \frac{M_{i,j}(\Phi)}{\int_0^{2\pi} |M_{i,j}(\Phi)| d\Phi}, \quad (4.2)$$

where the subscripts i and j refer to the index of the homoclinic or heteroclinic loop as defined in Section 3.2. The Melnikov functions are computed numerically by direct evaluation of the integral along Γ in Eq. (4.1). Fig. 9 shows the normalised Melnikov functions for the homoclinic loops $\Gamma_{1,1}$ and $\Gamma_{2,2}$ and the heteroclinic connections $\Gamma_{1,2}$ and $\Gamma_{2,1}$, each of them computed for four values of $Ra > Ra_c$. In all cases $\Lambda(\Phi)$ vanishes at least twice, indicating transversal intersections of the manifolds, and hence the existence of chaotic tangles via the break-up of the connections.

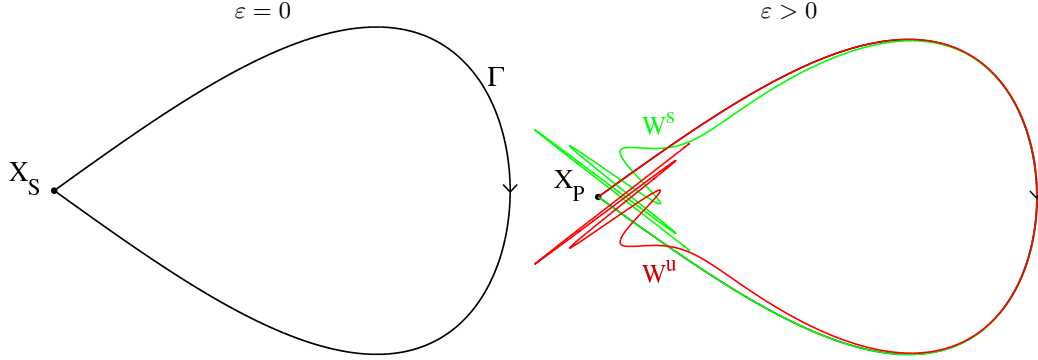


FIGURE 8. Left. Sketch of a homoclinic connection Γ from a fixed point \mathbf{X}_S ($\varepsilon = 0$). Right. Transversal intersections of the stable (W^s) and unstable (W^u) manifolds of the associated periodic point \mathbf{X}_P lead to a homoclinic tangle ($\varepsilon > 0$).

Both unstable periodic points \mathbf{X}_{P_1} and \mathbf{X}_{P_2} , respectively associated with \mathbf{X}_{S_1} and \mathbf{X}_{S_2} , give rise to the tangles shown in Fig. 10 for the case $Ra = 1.587 \times 10^8$. It is noteworthy from Fig. 10 (right) that for Ra closest to Ra_c , the distance $|\mathbf{X}_{P_i} - \mathbf{X}_{S_i}|$ is larger for $i = 1$ than for $i = 2$. This is due to the intensity of the oscillations of \mathbf{U}_P being much larger near \mathbf{X}_{S_1} than near \mathbf{X}_{S_2} , as is already clear from Fig. 3. Note the similarity between Fig. 10 (right) and the sketch in Fig. 8 (right). *All* destabilised homoclinic/heteroclinic connections identified in Figure 5 induce fluid mixing, at least in a finite-size neighbourhood. Tracers seeded in the close vicinity of such hyperbolic points appear to spread over an area comparable to that of the lobes, so that mixing is only partial for $Ra = 1.587 \times 10^8$. This is typical of the existence of transport barriers in an $O(\varepsilon)$ -vicinity of the homoclinic tangle, as will be investigated in the next subsections. The case of higher Ra (when ε is no longer small) will be treated in the last section of the paper.

4.4. Periodic Points in the stroboscopic section

Because of incompressibility, periodic points in Π can only be saddles or centres, while sinks are precluded. Because mixing is related to stretching by the velocity field, local mixing can only occur in the immediate vicinity of hyperbolic saddle points in Π , which in continuous time correspond to either saddle points or unstable periodic orbits (UPOs), but not around centres. As seen in the previous subsection, the periodic points corresponding to saddle points of the base flow all induce mixing in the unsteady regime. In fact, all hyperbolic points identified in Π have the property to mix fluid over some (*a priori* unknown) finite-size area. Within the mixing zone corresponding to one given periodic point \mathbf{X}_P , a dense aperiodic trajectory linking any two points should exist, as a consequence of the chaotic nature of mixing. Hence any point within that zone should be arbitrarily close to both $W^s(\mathbf{X}_P)$ and $W^u(\mathbf{X}_P)$. In other words the mixing area associated with a given periodic point \mathbf{X}_P in Π coincides with the closure of its stable and unstable manifolds, themselves being interpreted as the skeleton of the hyperbolic mixing zone. This point of view is prominent in the study by Feudel *et al* (2005) who suggest that the total area occupied by mixing in the system corresponds to the closure of a *bundle* of manifolds.

Here we wish to determine numerically the mixing zone associated with each periodic point that can be identified in Π , by tracing out its stable and unstable manifolds and

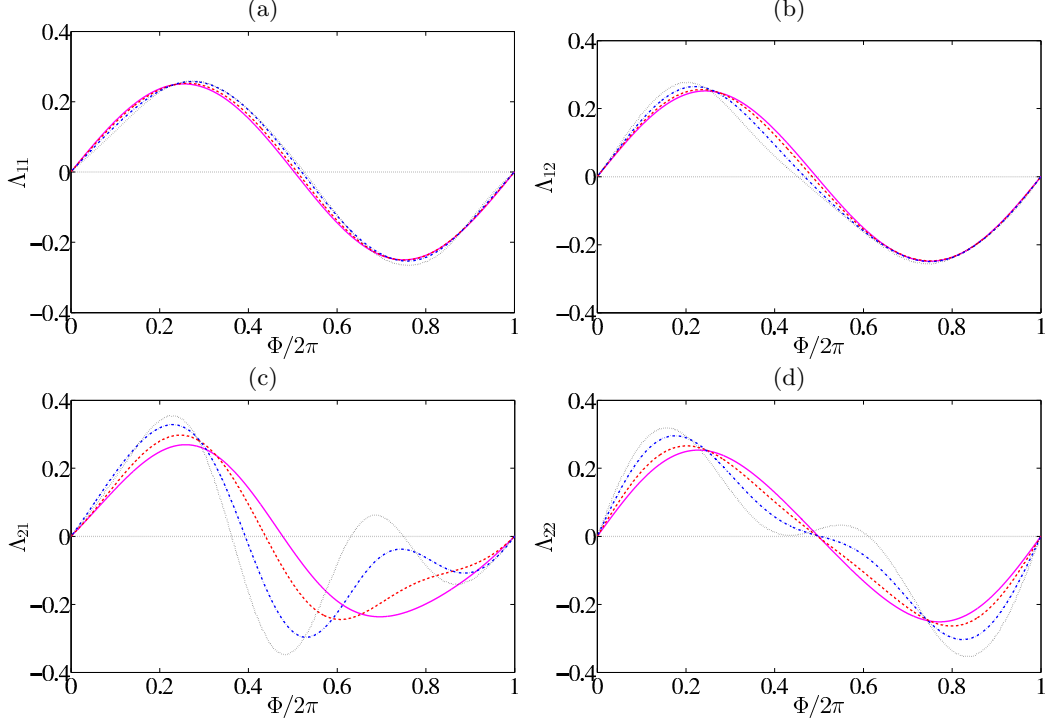


FIGURE 9. Normalised Melnikov functions $\Lambda_{i,j}$ associated with saddle points of the unstable steady state for $Ra = 1.587 \times 10^8$. The presence of isolated zeros shows the existence of homoclinic/heteroclinic tangles. (—), $Ra = 1.590 \times 10^8$ (---), $Ra = 1.600 \times 10^8$ (· · ·) and $Ra = 1.625 \times 10^8$ (· · ·).

measuring the area covered by their intertwining. This task is ambitious since i) there are infinitely many periodic points of arbitrary high period and ii) the infinitely convoluted geometry of these manifolds requires in practice a coarse-graining procedure. Moreover, each mixing zone contains new periodic points whose manifolds cover the same area as the periodic point originally considered to define the mixing zone. Hence redundancies are expected in practice. The benefit of this approach is an accurate *a priori* prediction of the various mixing zones of the flow from a deterministic point of view, rather than from the statistical *a posteriori* analysis of Section 3. Besides, as we shall see, in practice a finite number of periodic points is enough to obtain a quantitatively satisfying coverage of all mixing zones, and hence to determine to which degree mixing in the cavity can be considered as complete or incomplete. It is moreover expected that the chaotic area increases with Ra and we suggest in what follows a method to quantify it.

The method relies on the computation of *spreading maps* associated with every individual periodic point in Π . We first begin by extracting numerically as many periodic points as possible using the method explained in Subsection 4.2. We introduce the disk \mathcal{B}_i of radius d centered on a periodic point P_i of period T_i . A finite number of tracers (\mathcal{B}'_i) is chosen in \mathcal{B}_i as in Subsection 4.2. The *partial* spreading map associated with P_i is defined as

$$S_i = \bigcup_{|q| \leq Q} \pi^{qT_i}(\mathcal{B}'_i). \quad (4.3)$$

We later define the *total* spreading map as the union of all partial spreading maps for

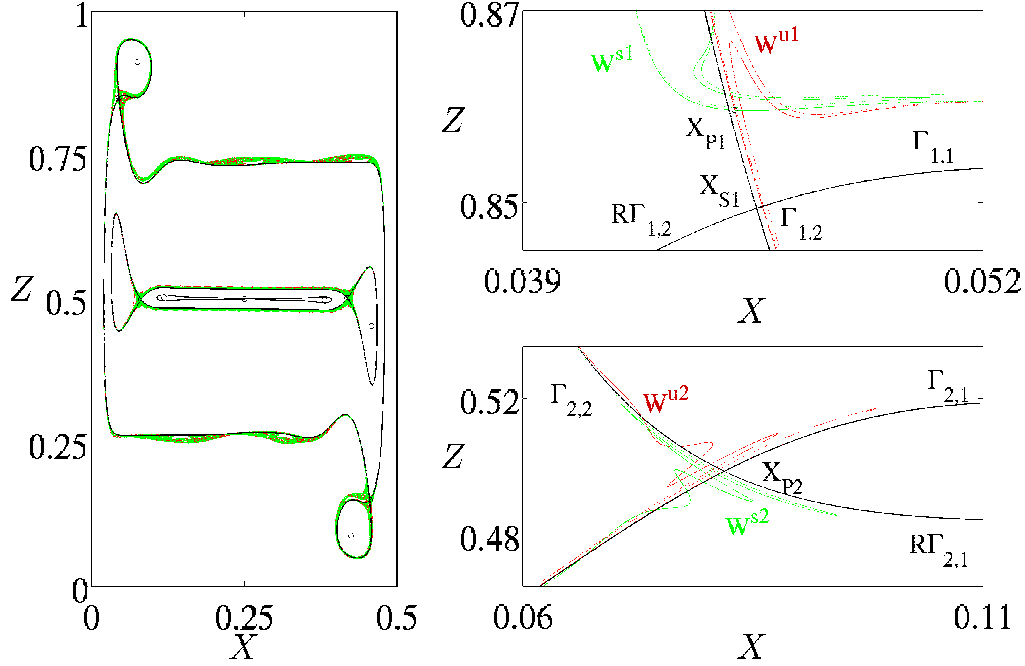


FIGURE 10. Circles: fixed points associated with the unstable steady state at $Ra = 1.587 \times 10^8$. Solid lines: homoclinic and heteroclinic orbits. Black dots (red online): forward time integration, Grey dots (green online): backward time integration. Both disks are composed of 10^4 particles and are integrated over 50 periods in Π following the procedure described in Subsection 4.2. The two panels on the right display zooms on the crossing manifolds originating from X_{P1} (top) and X_{P2} (bottom) on shorter integration times. Note that X_{P2} and X_{S2} are nearly indistinguishable.

a given value of Ra :

$$\Sigma_n = \bigcup_{P_i \in \mathcal{R}_n} S_i, \quad (4.4)$$

where \mathcal{R}_n is the set of all identified periodic points whose period is less than nT_0 . In the present investigation, we used $d = 10^{-7}$, $Q = 50$ and $n = 40$, as a compromise between accuracy and computational effort (see Section 5).

Two examples of partial spreading maps are shown in Fig. 11. The corresponding UPO (left column), the associated partial spreading map (center column) and a zoom on its stable/unstable manifolds (right column) are successively displayed.

- The first UPO (first row) has period $2T_0$ and is associated with two periodic points of period two. The UPO is entirely located in one of the two detached corners. Even if it occupies a small fraction of the cavity (Fig. 11a), the mixing induced by the periodic point is considered as efficient since it covers a comparatively large area that coincides with A_2 (Fig. 11b). It is clear from Fig. 11c that the stable and unstable manifolds of these points cross transversally and that the scenario of Subsection 4.3 is reproduced even in the absence of homoclinic loop.

- The second UPO shown in Fig. 11d (solid line) has period $6T_0$ and is associated with 6 periodic points in Π . As can be seen from Fig. 11e, the mixing induced by this UPO is highly inefficient even though the diameter of the UPO is comparable to the cavity size. A zoom on the topological structure around two of these periodic points is shown in Fig. 11f. The vicinity of the orbit exhibits heteroclinic connections between 4 periodic points

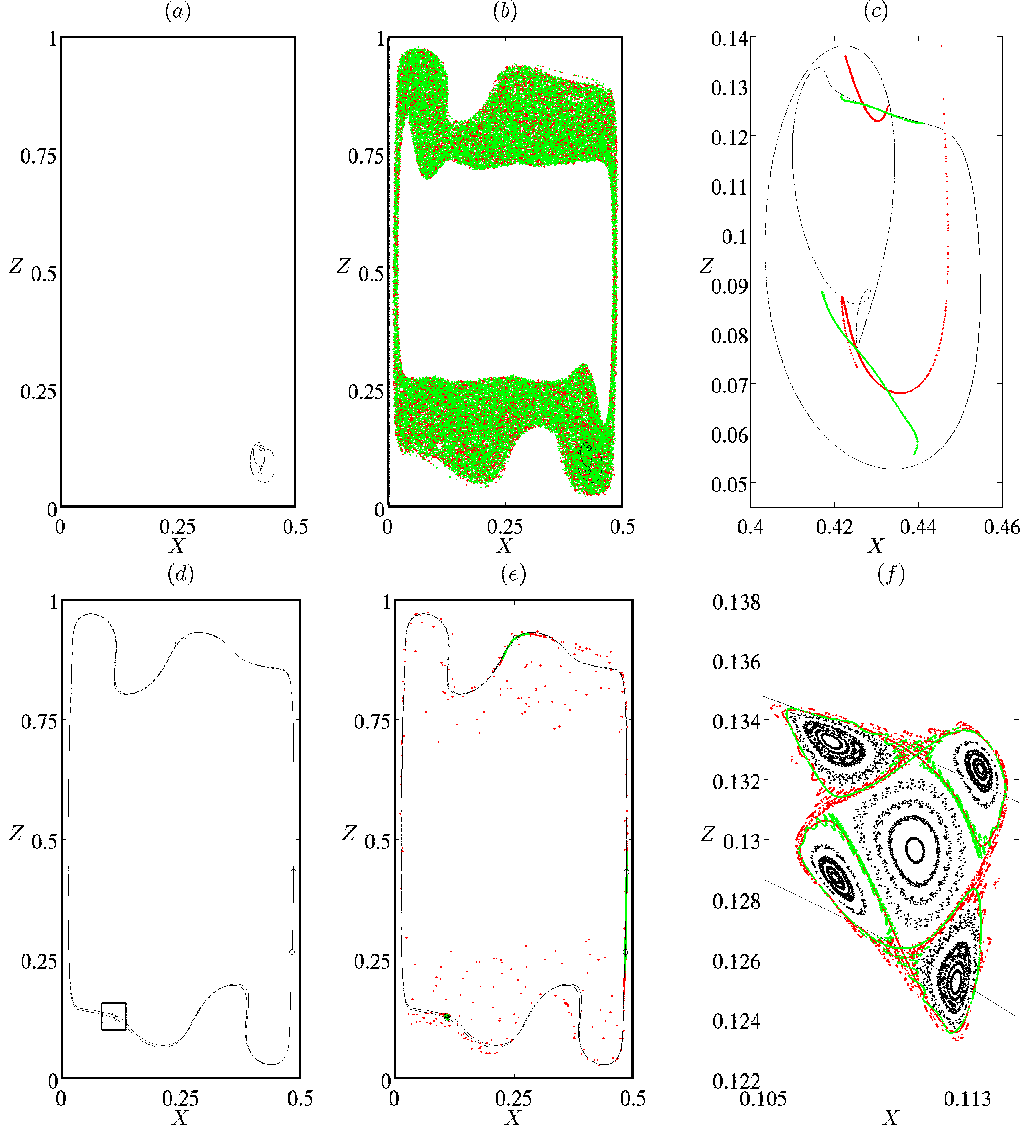


FIGURE 11. $Ra = 1.625 \times 10^8$. Left column: Unstable Periodic Orbits (lines) and associated periodic points (open dots) in Π . Middle column: partial spreading map for the periodic points in Π . Right column: zoom on the manifolds of the periodic points. Forward iterations shown in black (red online), backward in grey (green online). Top row: tangle associated with a periodic point with period $T = 2T_0$. Bottom row: non-mixing island associated with resonant streamline of period $T = 6T_0$. Fig. 11f is a close-up of the rectangle in Fig. 11a.

and the appearance of several heteroclinic tangles. However the structure defined by the periodic points composing the heteroclinic tangles does not spread particles efficiently. Those two examples demonstrate that the diameter of a given UPO and its mixing properties are not necessarily correlated.

4.5. Resonant streamlines

In order to highlight the dynamics inside the structure displayed in Fig. 11f, we have added lines of particles inside each region lying between the saddle points represented,

and propagated these new tracers in Π over a time of $50T_0$. This computation shows that if a particle starts inside the structure, it cannot escape from it. Most of those particles trace out ellipses in Π . Equivalently the continuous-time dynamics is quasiperiodic and the associated trajectories form toroidal surfaces in a space-time representation. These tori are precisely the Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) tori resulting from the non-integrability of the Hamiltonian system (3.1). These structures are not associated with an unstable manifold and hence are not repelling. Tracers in a neighbourhood of KAM tori are known to "stick", which results in increased residence times. As a consequence of this stickiness effect, they are commonly interpreted as the origin for non-hyperbolicity in the statistics of return times. The KAM tori define strict material barriers in Π (Ottino (1990)), forbidding transport from one mixing zone to another one.

In the steady regime any streamline, parametrised by its closure time T_{SL} , acts as a barrier to transport. As the flow becomes oscillatory, the periodic dynamics of tracers becomes in principle quasiperiodic with two periods, one close to T_{SL} and the second being T_0 . The KAM theorem (see e.g. Guckenheimer and Holmes (1983)) ensures that for $0 < \varepsilon \ll 1$ a measurable set of toroidal trajectories are preserved, allowing for the presence of *non-mixing islands*. The condition for toroidal trajectories, i.e. material barriers to persist is that the ratio $\delta = T_{SL}/T_0$ be sufficiently far from any rational number p/q (with p and q not too large in practice when dealing with computer arithmetics). This predictive argument associates transport barriers in the unsteady regime with certain streamlines of the steady base flow that are more robust to unsteady forcing than others. Streamlines for which δ is close to a rational number p/q can lock on a periodic motion with $T_{SL} = pT_0/q$. Such *resonant streamlines* undergo a saddle-node bifurcation giving rise to the alternation between saddles (hyperbolic orbits) and centres (elliptic orbits) illustrated in Fig. 11f. Manifolds originating from the saddle points form homoclinic and heteroclinic tangles enclosing the elliptic points and are responsible for the emergence of a *stochastic layer* in which mixing occurs locally. Similarly, other resonances can occur inside each region surrounded by a heteroclinic tangle, resulting in a complex tapestry of barriers and stochastic layers. The width of these stochastic layers is usually smaller with increasing values of q but grows with ε . Several neighbouring layers predicted by this arithmetic criterion can hence overlap as ε increases, hence producing a wider mixing zone in which diffusive motion of the tracers is possible (Cencini *et al* (2010), Mitchell and Grigoriev (2012)).

Resonant streamlines, via the formation of heteroclinic tangles, are naturally associated with periodic points in Π , be they hyperbolic or elliptic. Hyperbolic and elliptic points appear together via saddle-node bifurcations and hence come in pairs. Conversely, once a periodic point is identified in Π , it is not trivial to distinguish whether it is originally associated with the resonance of a given streamline or with one of the tangles predicted by Melnikov analysis. The Kolmogorov-Arnold-Moser theorem suggests that non-resonant tori should be present in the vicinity of most elliptic periodic points, implying non-mixing islands (Wiggins and Ottino (2004)) and thus non-hyperbolic statistics. The question remains however non-trivial in the case of hyperbolic points. The distinction is further complicated by the fact that periodic points can undergo bifurcations as ε is increased. The simplest approach to this question is to check, orbit by orbit, whether the resonance criterion

$$T_{SL} = pT_0/q \quad (4.5)$$

is verified or not. Considering again the segment χ defined in Section 3.2, we plot in Fig.

12 the period of all periodic orbits crossing χ versus the crossing coordinate X_0 , together with the return times T_{SL} associated with the steady base flow. Saddle points are shown as points, elliptic points as open circles. The periodic points whose period falls close to integer multiples of $T_{SL}(X_0)$ should correspond to the thickest resonant tori with $q = 1$. The value of $Ra = 1.625 \times 10^8$ is chosen for comparison with the statistical analysis of Subsection 3.3.

The distribution of the periods is of course limited by the number of UPOs found. However even with 168 orbits this distribution reveals interesting features. A vast majority of the periodic orbits, both hyperbolic and elliptic, whose period is commensurate with T_{SL} in Fig. 12, correspond to values of $\delta = T_{SL}/T_0 = 1$ to 5 and belong to the region denoted N_2 in Subsection 3.3. Other elliptic points were also identified in the region N_1 , as well as in the region A_3 with $\delta=1$ and in N_3 with $\delta=2$ and 5. Neither hyperbolic orbits nor elliptic orbits have been detected in A_1 and A_2 using this criterion. Note that this approach is necessarily partial since it requires the periodic orbits to cross the segment χ , while the choice of χ is convenient but still arbitrary.

A direct interpretation of Fig. 12 in connection with the statistics of Subsection 3.3 is now possible. The presence of elliptic orbits satisfying the criterion (4.5) implies the proximity of non-resonant orbits (KAM tori or non-mixing islands). By default, periodic orbits which according to Eq. (4.5) do not come from resonances, are most likely embedded in the tangles associated with the destabilisation of homo/heteroclinic loops as in Subsection 4.3. Consequently the region N_2 is expected to be populated by many non-hyperbolic objects such as the non-mixing islands of Fig. 11f. N_1 and N_3 contain a small but non-zero number of such elliptic orbits and hence should contain a few non-mixing islands too. A_3 contains very few low-period elliptic orbits, which explains that its non-hyperbolic statistical properties emerge for large times. A_2 does not show any such resonance, which by default is consistent so far with its hyperbolic nature. Besides, the only periodic points identified in A_2 are hyperbolic and occur close to the fractal distribution of the return times T_P , which is consistent with the picture of a homo/heteroclinic tangle of Fig. 8. Yet it is fair to recall that the statistics in question are also dependent on the choice of the segment χ , so that non-hyperbolicity is not strictly ruled out provided a few non-mixing regions exist that do not cut χ . This case will be examined in further detail in Section 5 using spreading maps. The case of A_1 , which does not feature resonances according to Fig. 12 but still shows clear non-hyperbolic statistics, seems contradictory. This case is however peculiar since this region also includes the streamlines closest to the walls. Because of the no-slip condition, the velocity \mathbf{U} vanishes at the wall, and hence the period T_{SL} diverges too, making resonances impossible. A_1 is thus expected without any preliminary analysis to display strongly non-hyperbolic statistics since the wall itself, as well as all neighbouring streamlines, can be interpreted as a non-resonant KAM torus.

We pay a particular attention to some of the periodic points represented in Fig. 12 both as centres and saddles, mainly distributed in the region N_2 . We cannot certify the stability of those periodic points through the finite-difference computation of Subsection 4.2. Because of the fractal configuration of the KAM tori alternating with mixing areas, the perturbed trajectories used for the linearisation can very well be located outside the zone under investigation. They can land on another KAM torus (the point is identified as a center) or in a locally mixing area (it is detected as a saddle). This ambiguous property is not a numerical artefact but reflects the multiscale structure of Π . Note that this is in

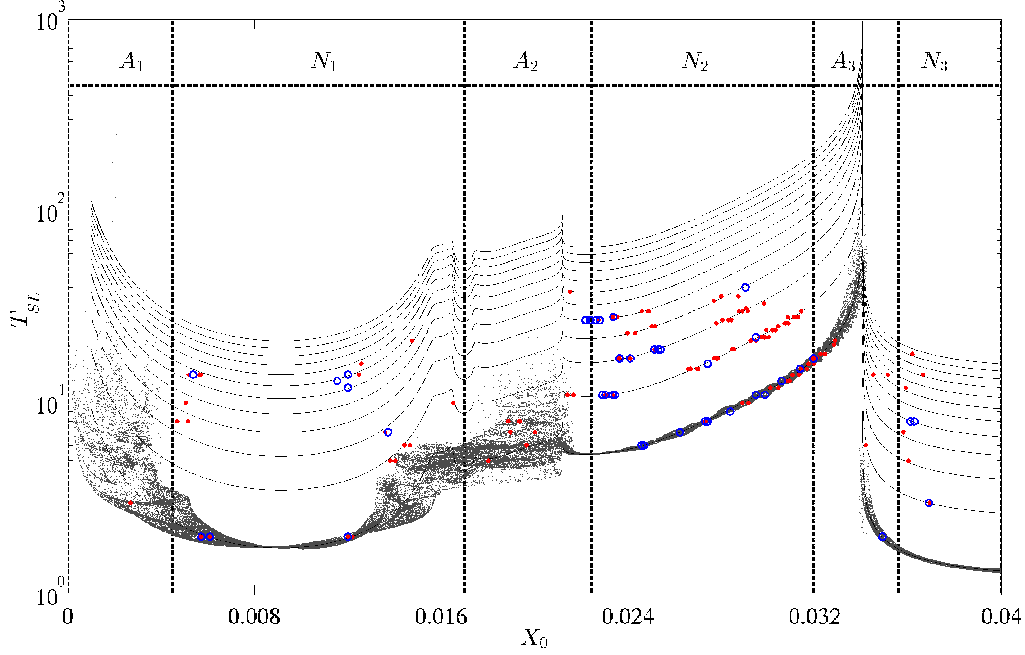


FIGURE 12. Solid lines: T_{SL} as a function of X_0 with integer multiples $n \times T_{SL}$ for $Ra = 1.625 \times 10^8$. Back dots (red online): unstable Periodic Orbits crossing the segment $\chi = \{X \in [0, 0.05], Z = 1/2\}$. Circles (blue online): elliptic periodic orbits. Grey dots: distribution of return times $T_P(\Phi, X_0)$ (from Fig. 5b). A_i and N_i , $i = 1, 2, 3$ correspond to the areas defined in Fig. 6.

any case a minor issue since these points never contribute significantly to the spreading of the tracers.

The fine-scale coexistence of hyperbolic and non-hyperbolic regions is finally illustrated for $Ra = 1.625 \times 10^8$ around the vortex in the middle-right of the cavity, i.e. around $X = Z \approx 0.45$, see Fig. 13. This area involves mainly the regions A_3 and N_3 as well as the homoclinic loop $R\Gamma_{2,2}$. Fig. 13a shows all periodic orbits identified in the continuous-time representation, along with the homo/heteroclinic loops. Fig. 13b,c show the spreading maps associated with all those orbits for a short and a long observation time, respectively. Note that the heteroclinic loop $\Gamma_{2,1}$ acts as a barrier isolating the central region of the cavity from the rest of the flow. It is visually clear from Fig. 13 that the complete or incomplete character of the mixing, as well as the associated statistics, result from a compromise between the hyperbolic tangle predicted by the Melnikov function $\Lambda_{2,2}$ and the many KAM tori (barriers) remaining in the flow for this value of Ra .

5. Mixing versus Ra

The total spreading maps defined in Section 4.4 offer a more global vision of the regions affected or not by mixing for a given value of Ra . Fig. 14 displays for several values of Ra the hyperbolic periodic points used for the computation of the manifolds. The spreading maps Σ_n are computed in practice by paving the domain with square cells of area ΔX^2 , and counting the number of tracers that have passed through each cell over a given time horizon $T_{obs} = QT_0$, with $Q = 50$. The resulting maps are shown in Fig. 15 for increasing

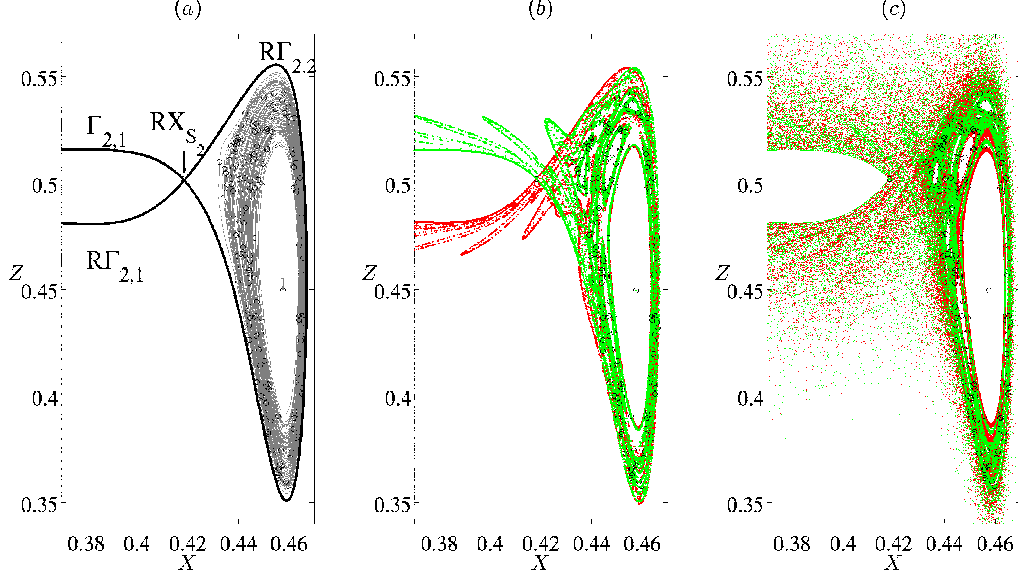


FIGURE 13. (a) Periodic Orbits (grey lines) and corresponding periodic points in Π (circles) identified numerically in the vicinity of $R\Gamma_{2,2}$ for $Ra = 1.625 \times 10^8$. Black lines: $\Gamma_{2,1}$, $R\Gamma_{2,2}$ and $R\Gamma_{2,1}$. (b) Stable (grey, green online) and unstable (black, red online) manifolds of these periodic points. The main homoclinic tangle originates from X_{P2} and surrounds non-mixing islands and stochastic layers formed by resonant streamlines. (c) Same as (b) with partial spreading maps superimposed. Stochastic layers overlap leading to a complex mixing zone.

values of Ra . Cells occupied by at least one or more tracers are represented in black, while cells that have remained empty over the time interval $[0 : T_{obs}]$ are left blank. The black cells are by construction connected to the hyperbolic periodic points of Fig. 14 by their stable/unstable manifolds, which as seen in the previous section are parts of chaotic tangles. Black cells thus define the mixing regions within the coarse-graining approximation.

The lowest values of Ra displayed in Figs. 15a,b,c feature white stripes whose width and number diminish with increasing Ra . The dynamics of the tracers inside those regions is strictly quasiperiodic and these zones are interpreted as non-mixing. These regions are isolated from the other mixing regions (represented in black) by clear material barriers. White holes embedded in a black chaotic sea are the signature of non-mixing islands such as in Fig. 11f. They can be isolated or form chains of non-mixing islands exhibiting an alternation of hyperbolic points and centres typical of KAM resonances and already visible in Fig. 14. A robust white zone remains for all values of Ra in the central zone of the cavity. As previously mentioned, the velocity magnitude is slow because of the anti-symmetry of the velocity field. Mixing, if it occurs, is extremely slow and is not observed in finite-time computations. It is therefore interpreted in the reminder of the paper as a robust non-mixing zone. The case of $Ra = 1.625 \times 10^8$ discussed in Subsection 4.5 is shown in Fig. 15c. As predicted from the distribution of elliptic points in Fig. 12, the region previously denoted N_2 contains a multi-scale tapestry of non-mixing islands that is associated with strongly non-hyperbolic dynamics, in other words it can be qualified as a very "sticky" region. The region A_2 was suggested, from the scattering statistics of Section 3 based on the test section χ , to be a hyperbolic region. In the previous Subsection a note of caution was addressed, linked to the possible existence of KAM tori that would not cross χ and hence heavily alter the statistics. Fig. 15c reveals a small number

of isolated white holes in A_2 , yet no clear white regions inside the vortex corresponding to the homoclinic loop $\Gamma_{1,1}$ — at least within an accuracy $O(\Delta X)$. This justifies why the homoclinic tangle associated with $\Gamma_{1,1}$, where the forcing by \mathbf{U}_P has strongest amplitude, appeared as hyperbolically mixing. This contrasts with the other homoclinic tangle associated with $\Gamma_{2,2}$ and displayed in Fig. 13, which for the same value of Ra features many non-mixing islands and thus strong non-hyperbolic statistics. The relatively small white holes identified near the border between regions A_2 and N_1 are expected to destroy the hyperbolic nature of A_2 by inducing over longer observation times an algebraic rather than exponential decay of the return-time statistics. This remains however to be confirmed using much longer simulations. For lower values of Ra , that same region A_2 displays a few white holes, i.e. the presence of KAM tori, within the corner vortex inside $\Gamma_{1,1}$, in a way similar to Fig. 13. For the largest value $Ra = 2.05 \times 10^8$, within the observation times considered here, almost all barriers have disappeared except in the center of the cavity. Increasing Ra mainly increases the forcing amplitude, while the forcing frequency remains constant at leading order. The increasing amplitude reduces stickiness effects associated with KAM tori because more and more of these tori resonate. In theory the last surviving KAM torus should correspond to the most irrational value of δ (in terms of its approximation by rational fractions). This prediction however does not take into account the steady "streamline" (defined as such since associated with the integrability condition $\Psi = \text{const}$), i.e. the walls, which will remain non-hyperbolic for all values of Ra even far beyond the periodic regime.

Total spreading maps can be used to provide a quantitative estimation of how complete mixing is for a given value of Ra . The area covered by the bundle of manifolds originating from all unstable periodic orbits of period less than nT_0 , is computed by monitoring the fraction of cells of area ΔX^2 visited by at least one particle over the observation time $T_{obs} = QT_0$. The cell size ΔX is chosen such that the number of cells equals the number of released tracers times the number of passages in Π . If spreading were homogeneous, each box would be filled. The box resolution is therefore a function of n , the longest period among all the UPOs considered here. In this coarse-grained approach, the number of cells filled at least with one tracer is $B \leq 1/(2\Delta X^2)$ as in Stremler (2008) and Chabreyrie *et al* (2011). The total fraction C of chaos is defined as the area covered by the B cells normalised by the surface of the cavity: $C = 2B\Delta X^2$. If C reaches unity, we expect that most KAM tori have become resonant, or have overlapped. This extreme case corresponds to complete mixing.

A note of caution about the use of time-discretised numerical simulations is welcome at that stage. Because the mixing regions are intrinsically chaotic and hence display sensitivity to initial conditions, the computation of the stable or unstable manifolds is expected to show errors that increase exponentially with time, no matter the accuracy of the temporal scheme. Fortunately, the long-time influence on the global spreading maps is less dramatic, as their topology is mostly dependent on the location of the non-mixing islands. Since KAM tori are associated with strictly zero Lyapunov exponents, the accuracy of the whole protocol is only limited by the accuracy with which the tori are represented numerically, as well as by the coarse-graining parameters. In practice time-stepping algorithms are characterised by diffusing properties (see the closure of streamlines documented in Subsection 3.1) which defines a numerical Lyapunov exponent. That numerical exponent is usually very small in practice yet sets a limit to the duration over which tracers can be reliably tracked.

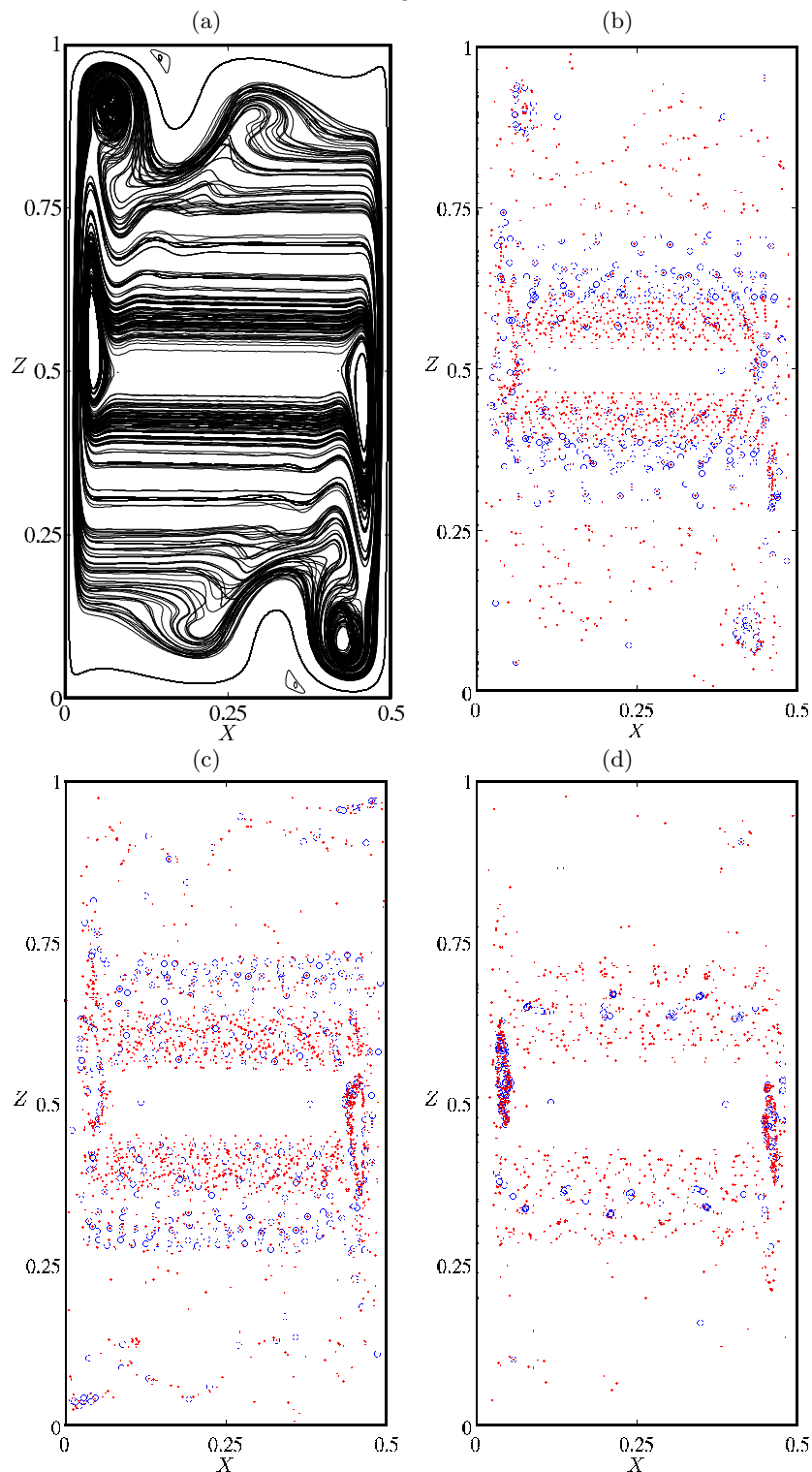


FIGURE 14. (a) Unstable Periodic Orbits identified for $Ra = 1.6 \times 10^8$. (b), (c) and (d): Associated periodic points represented with filled circles (saddle points, red online) or open circles (elliptic points, blue online). (b) $Ra = 1.6 \times 10^8$, (c) $Ra = 1.625 \times 10^8$ and (d) $Ra = 2.05 \times 10^8$.

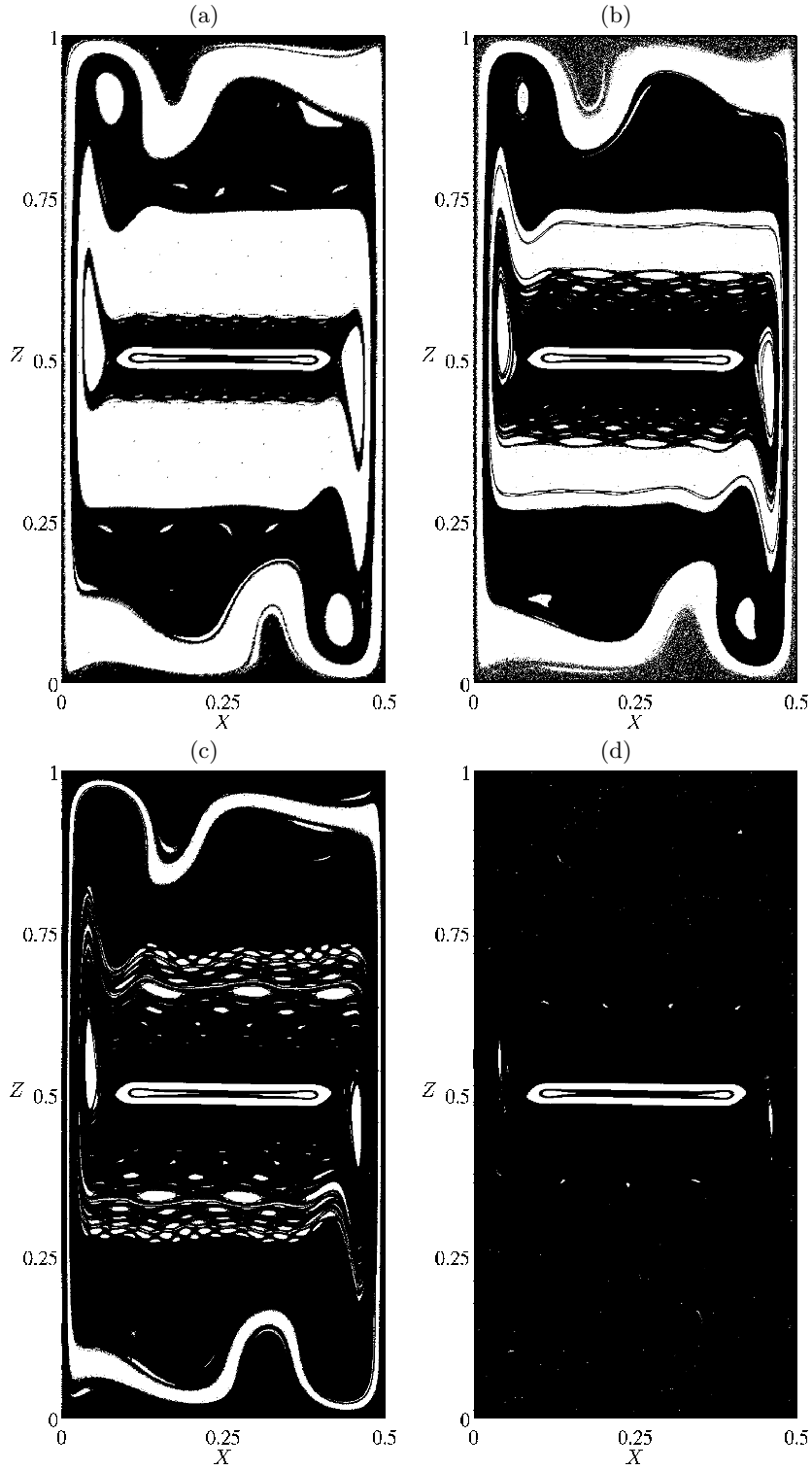


FIGURE 15. Total spreading maps $\Sigma_{n=40}$ for (a) $Ra = 1.59 \times 10^8$, (b) $Ra = 1.6 \times 10^8$, (c) $Ra = 1.625 \times 10^8$, (d) $Ra = 2.05 \times 10^8$.

$Ra \times 10^8$	n	Number of different orbits	Number of hyperbolic orbits	Number of tracers	Cell size ($\times 10^{-3}$)
1.600	5	27	16	80 000	2.500
	10	51	31	155 000	1.796
	20	84	55	275 000	1.348
	40	127	87	435 000	1.072
1.625	5	31	20	100 000	2.236
	10	69	41	205 000	1.562
	20	123	80	400 000	1.118
	40	168	118	590 000	0.921
1.800	5	15	9	45 000	3.333
	10	52	37	185 000	1.644
	20	101	78	390 000	1.132
	40	139	109	545 000	0.958
2.000	5	33	23	115 000	2.085
	10	62	47	235 000	1.459
	20	131	106	530 000	0.971
	40	159	129	645 000	0.880
2.050	5	29	18	90 000	2.357
	10	53	38	190 000	1.622
	20	98	78	390 000	1.132
	40	119	94	470 000	1.031

TABLE 1. Periodic orbits used for the computation of the chaotic fraction $C(Ra)$ shown in Fig. 16.

The total chaotic fraction is shown in Fig. 16 as a function of Ra , parametrised by n and the cell size. Varying n allows one to distinguish the contribution to total mixing by shorter period UPOs from that by longer period ones. The general conclusion from Fig. 16 is that the fraction of Lagrangian chaos in the cavity smoothly increases from 0% near Ra_c towards almost 100% for $Ra = 2.05 \times 10^8$. Whereas the spreading maps depend by construction on the phase Φ chosen to define the stroboscopic section Π , the quantity C represents a normalised area, which because of incompressibility does not depend on Φ . Low-period UPOs appear to contribute most significantly to the total chaotic fraction C , yet UPOs of larger period are also quantitatively significant. This trend progressively disappears for increasing Ra . The fact that C stays bounded strictly below 100% is attributed to the robust non-mixing zone at the center of the cavity, where the motion of the tracers is too slow to exhibit mixing in a finite time.

The largest value of $Ra = 2.05 \times 10^8$ displayed in Fig. 16 has $C \approx 0.98$, i.e. nearly 100%. Fig. 15d visually suggests that all white stripes, i.e. all barriers to transport have disappeared, which would in addition imply that one single mixing region fills the whole cavity. The quantity C is however not a measure of the connectedness of the spreading maps, the hypothesis that mixing is complete at this value of Ra thus has to be verified using an alternative diagnostic. The next section examines more closely this suggestion by focusing mainly on $Ra = 2.05 \times 10^8$.

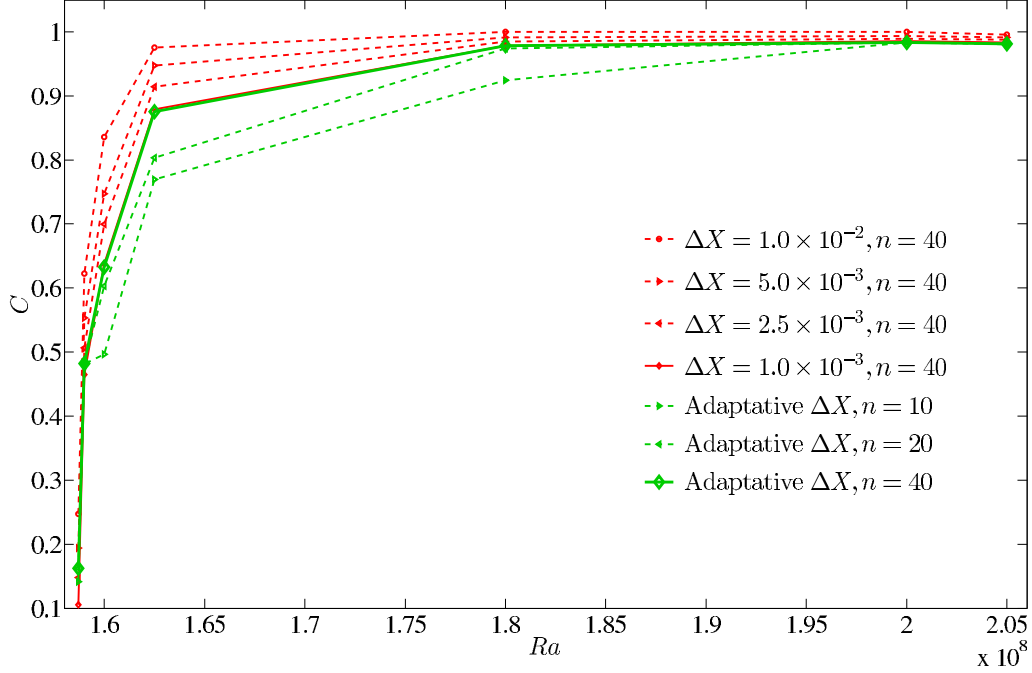


FIGURE 16. Chaotic fraction C versus Ra . Grey (green online): computations using $n = 40$ and cell size ΔX as in Table 1. Black (red online): computations using fixed mesh size ΔX and varying n . The thickest line corresponds to the case with smallest ΔX and largest n .

6. From local to global mixing

As seen in the previous section $C \lesssim 1$ for $Ra = 2.05 \times 10^8$, which indicates that the flow is locally mixing almost everywhere in the cavity at the exception of the central area. This however does *not* directly imply complete mixing in the sense of a unique, connected and space-filling mixing region. Complete mixing would imply that a dense aperiodic trajectory exists in Π . In other words, almost all barriers should have disappeared and it would be possible to spread tracers throughout the whole domain by releasing them at initial time from a single given location. In this section we select one such initial location and study statistically the dynamics of the tracers for varying Ra , expecting an increasingly homogeneous spreading for larger values of Ra . The initial location was chosen to correspond to the periodic point \mathbf{X}_{P_2} , already formally defined in Section 3 as the destabilisation of the homoclinic fixed point \mathbf{X}_{S_2} associated with the steady base flow. \mathbf{X}_{P_2} can be defined for any arbitrary phase of the velocity field and, importantly, moves weakly with Ra . The choice of \mathbf{X}_{P_2} was largely motivated by the fact that it was easy to track in Π for increasing Ra (whereas continuation of \mathbf{X}_{P_1} proved more difficult). Once identified, 10^3 tracers are placed inside the disk \mathcal{B} around \mathbf{X}_{P_2} according to the protocol described in Subsection 4.2. The computation time is extended to $10^4 T_0$ instead of $50 T_0$ as considered for the spreading maps. If the barriers separating the different mixing areas (such as A_1 , A_2 and A_3 defined for the case $Ra = 1.625 \times 10^8$) have *all* become permeable with increasing Ra , the disk of particles should asymptotically spread homogeneously in Π as $t \rightarrow \infty$.

The notion of spreading is now considered in a statistical sense by investigating the average and variance σ_Z^2 of the stochastic variable Z describing the vertical position of

each individual tracer at any given time t . σ_Z^2 admits an upper bound which corresponds to the homogeneous distribution of tracers with respect to the Z coordinate:

$$\max(\sigma_Z^2) = \langle (Z - \langle Z \rangle)^2 \rangle = \int_0^1 \left(Z - \frac{1}{2} \right)^2 dZ = \frac{1}{12} \quad (6.1)$$

where $\langle . \rangle$ denotes ensemble averaging, and can be assimilated to vertical averaging under the ergodic hypothesis associated with homogeneous mixing. $\sigma_Z^2(t)$ is shown in Fig. 17a for several values of Ra . In all cases σ_Z^2 increases with time before reaching a plateau. Near the onset of unsteadiness Ra_c , σ_Z^2 remains far from its limit value $\max(\sigma_Z^2)$ in Eq. (6.1) even at large times.

We focus now on the largest value $Ra = 2.05 \times 10^8$ considered in this study. Three different consecutive stages R_1 , R_2 and R_3 can be identified in Fig. 17a. R_1 and R_2 both show linear dependence on time yet with different growth rates, while R_3 corresponds to the transient regime preceding a plateau now very close to $\max(\sigma_Z^2)$. Even if tracers are discrete entities and their number is finite, it is possible to define a pseudo-concentration and study its dependence on time. The pseudo-concentration γ is chosen to depend on the spatial variable Z only, the X -dependence being averaged out by construction. The cavity is first split along the Z -axis into m segments I_1, I_2, \dots, I_m of equal vertical extent $1/m$. If each segment I_j contains exactly M_j tracers at time t , and Z belongs to a given segment I_i , the pseudo-concentration $\gamma(Z, t)$ is later defined as

$$\gamma(Z, t) = \frac{M_i}{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m M_j} \quad (6.2)$$

In the extreme case of a perfectly homogeneous distribution of tracers, $\gamma = 1$ everywhere and its spatial variance σ_γ^2 is zero. The time evolution of $\gamma(Z)$ is shown in Fig. 17b using $m = 20$. At early times, particles are concentrated around the mid-height of the cavity, close to the tangles associated with $\Gamma_{2,1}$ and $\Gamma_{2,2}$. As time increases, tracers migrate from the centre towards the rest of the cavity (see Figs 17d-f). Fig. 17b allows for an interpretation of the stages R_1 , R_2 and R_3 identified in Fig. 17a. R_1 corresponds to tracers progressively invading the region $Z \in [0.3, 0.7]$, i.e. the remains of regions A_3 and N_2 defined for a smaller value of Ra . The dynamics associated with R_1 scales as $\sigma_Z^2 \approx 3.1 \times 10^{-3}t$. R_2 in turn corresponds to tracers invading the outward regions $Z \in [0, 0.3]$ and $Z \in [0.7, 1]$, with $\sigma_Z^2 \approx 4.7 \times 10^{-3}t$. R_2 approximatively corresponds to regions A_2 , N_1 and A_1 in Fig. 6. The relative acceleration undergone by σ_Z^2 between R_1 and R_2 is consistent with the different dynamics identified at lower Ra in the previous section. In particular N_2 is known to result from the break-up and overlapping of an infinity of chains of non-mixing islands. These structures are expected to increase statistically the stickiness of tracers and hence to slow down the spreading process. The linear scaling of the variance in R_1 and R_2 expresses the diffusive motion of tracers in those regions (Cencini *et al* (2010)). At the end of the stage R_2 the tracers have spread by $t \approx 2800$ throughout the whole cavity while their distribution is still far from homogeneous, as indicated by the still large values of σ_γ^2 . The last stage R_3 consists in a slow homogenisation of the concentration along the Z -axis.

We investigate now the speed at which the homogenisation process takes place. For larger times, the variance $\sigma_\gamma^2 = \langle (\gamma - \langle \gamma \rangle_Z)^2 \rangle_Z$ is expected to tend to zero when the system tends to homogeneity. This limit cannot be reached as long as non-mixing islands persist in the system. For a hyperbolically mixing system, $\sigma_\gamma^2 \approx e^{-\alpha t}$ asymp-

totically in time, while for a non-hyperbolic one $\sigma_\gamma^2 \approx t^{-\lambda}$ where λ corresponds to the algebraic mixing rate of the system. The present simulations, carried over 10^4 periods, demonstrate a decrease of σ_γ^2 by two decades only, which however is enough to exhibit an algebraic decay. The algebraic mixing rate is estimated as $\lambda = 2.276$ for $Ra = 2.05 \times 10^8$. No algebraic decay rate could be extracted satisfactorily from simulations at lower values of Ra , where mixing can definitely not be considered as complete even in a loose sense. The reasons explaining the algebraic decay for $Ra = 2.05 \times 10^8$ have been already discussed earlier and are two-fold : i) a few small non-mixing islands are still present in the system and induce stickiness of the trajectories in their neighbourhood, ii) the walls act as non-hyperbolic streamlines. The fact that even a region of negligible area can radically alter the long-time asymptotical decay of the concentration variance is typical of area-preserving systems (see e.g. Artuso (1999)) and has been recently demonstrated theoretically (Salman and Haynes (2007)) and experimentally in high Schmidt number fluid mixtures (Gouillart *et al* (2008)).

As an important conclusion of the present section, mixing is almost complete before the periodic regime bifurcates towards quasiperiodic dynamics. This suggests that it is not necessary to consider dynamics more complex than the time-periodic regime to achieve complete mixing in this two-dimensional cavity flow.

7. Summary and Conclusions

We have investigated numerically the mixing of passive tracers for infinite Schmidt number in a closed two-dimensional differentially heated cavity. This flow is chosen as a prototype of closed convection flow in which several fundamental ideas can be tested, while it is also a widespread geometrical configuration in thermal engineering. It is demonstrated here that the first Hopf bifurcation of the Eulerian system with increasing Rayleigh number coincides with the onset of Lagrangian mixing in the cavity, and that the transition to almost-complete mixing takes place before the Eulerian system bifurcates into the quasi-periodic regime. Only the central region of the cavity appears in finite-time computations as robustly non-mixing because of the almost-vanishing velocities implied by the central symmetry of the flow field. It is hence interpreted as the dead zone of the flow. Using a scattering approach borrowed from studies of mixing in open flows, it is suggested that the flow in the partial mixing regime can be split into several zones characterised by different return time statistics. The statistics suggest the existence of both hyperbolic and non-hyperbolic regions. The latter result from the persistence of KAM tori as well as from the no-slip conditions at the walls. If the presence of the non-mixing islands gradually reduces with increasing Ra , the effect of the walls is weakly dependent on the value of Ra and should manifest itself in all regimes from laminar to fully turbulent. The extraction of a large number of unstable periodic orbits of the Lagrangian system (3.1) allows one for visualising the tangles resulting from intersecting bundles of manifolds (Feudel *et al* (2005)), i.e. the mixing regions. The elliptic periodic orbits indicate the proximity of non-mixing islands. Such orbits are associated with streamlines of the base flow in resonance with the oscillatory global mode. Superimposing all the corresponding manifolds in forward and backward time leads to a visualisation as well as to a multi-scale quantification of the fraction of chaos in the system. Non-hyperbolicity governs global statistics such as the temporal decay of the concentration variance at higher values of Ra . This result is classical in the literature on Hamiltonian systems. Our measurement of the algebraic mixing rate is here based on brute force computations and on the definition of a coarse-grained pseudo-concentration field. Refined alternative methods have been suggested recently to compute the algebraic mixing rate directly from

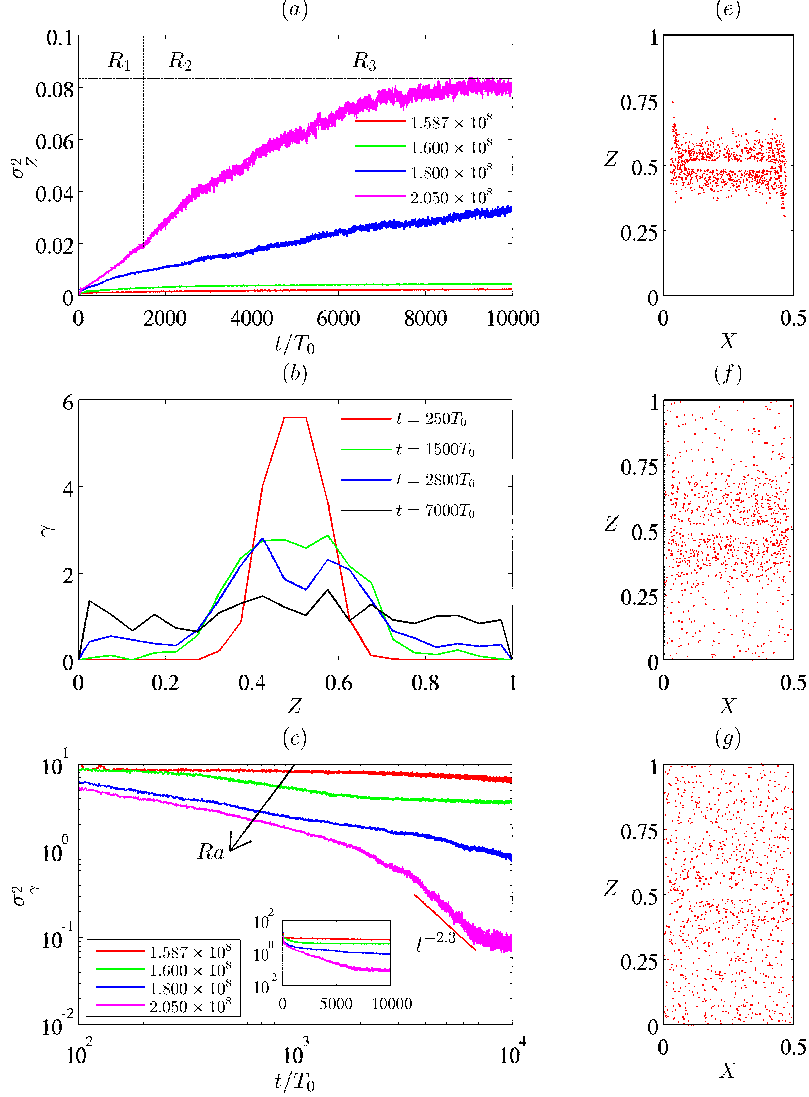


FIGURE 17. $Ra = 2.05 \times 10^8$. (a) $\sigma_Z^2(t)$ for different values of Ra (see sec. 6 for comments about R_1, R_2 and R_3). (b) $\gamma(Z, t)$ at four different times at $Ra = 2.05 \times 10^8$. (c) $\sigma_\gamma^2(t)$ for several values of Ra . The slope indicated in the figure corresponds to the mixing rate for $Ra = 2.05 \times 10^8$. Inset: $\sigma_\gamma^2(t)$ in lin/log scale. Right column: the spreading of particles after (e) $250 \times T_0$, (f) $2800 \times T_0$ (g) $7000 \times T_0$ for $Ra = 2.5 \times 10^8$.

the knowledge of the statistics of finite-time Lyapunov exponents (Artuso and Manchein (2009)). Such methods are attractive given the recent attention on Lagrangian Coherent Structures precisely based on the computation of finite-time Lyapunov exponents, yet they remain to be tested in this context.

A natural question is the extension of the present results to the case of diffusive tracers, as e.g. dye in an experimental set-up. The addition of a Gaussian white noise to Eq. (3.1) is strictly equivalent to the addition of a molecular diffusivity for the tracers, i.e. to a finite Schmidt number. In that case the algebraic decay of the statistics would be

lost in favour of a classical exponential decay (see e.g. Pikovsky and Popovych (2003)). It is however expected that the topology of the flow, in particular the location of homoclinic and heteroclinic loops, would still govern the dynamics of the tracers over very long times, at least in the weakly diffusive limit.

There are several ways to extend the present two-dimensional configuration to three dimensions. The differentially heated cavity flow has been the subject of a few three-dimensional Eulerian investigations, but so far only by considering confinement or extension in the third direction. For the extended case, it was shown that the first bifurcations from the base state involve very slow travelling waves located in the near-wall regions (Xin and Le Quéré (2012)). In a given transverse section, the two-dimensional base flow can be seen as modulated by the passage of the wave. Though the system is no longer Hamiltonian it is expected that the mixing phenomenology, based on tori resonances and on the presence of homoclinic tangles, would be qualitatively analogous to the unsteady two-dimensional case investigated here. Other interesting generalisations to three dimensions are perturbed axisymmetric geometries in which the two-dimensional set-up is recovered approximatively in each meridional section. When the unperturbed flow possesses a component along the invariant azimuthal direction θ , the Lagrangian system has a Hamiltonian structure, and the occurrence of KAM tori as transport barriers was demonstrated in a Poincaré section $\theta = cst$ (Fountain *et al* (2000), Pratta *et al* (2014)). Steady states in a cubic geometry have been investigated by Tric *et al* (2000). For such genuinely three-dimensional flows there is no straightforward methodology based on the knowledge of continuous symmetries in order to identify barriers to mixing. We expect however that the influence of the walls on the mixing rate is analogous to the two-dimensional case.

8. Acknowledgements

We would like to thank Airbus Group (EADS Foundation) for its financial support, as well as Shihe Xin for sharing his DNS code.

Appendix A. A fast algorithm to locate periodic points

We describe here a simple and original algorithm used to identify fixed points or periodic points in the two-dimensional stroboscopic section Π . The algorithm is inspired by the secant method. Its convergence properties have proven comparable or faster than the alternative Newton-Raphson solver in the present case. The algorithm identifies iteratively a zero of $\mathbf{g} = \boldsymbol{\pi}^n - \mathbf{I}$ for a given integer $n > 0$ by a simple bisection procedure. It is structured as follows:

- (a) Select an initial candidate \mathbf{X}_0
- (b) Consider the square of side $2d$ centered on \mathbf{X}_0 with sides parallel to X and Z . Label by \mathbf{X}_i , $i = 1, \dots, 8$ the corners of the square and the middle of each side
- (c) Evaluate the displacement $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}(\mathbf{X}_i)$ at all points \mathbf{X}_i , $i = 0, \dots, 8$
- (d) Select among them the point \mathbf{X}_k for which all components of \mathbf{g}_k have opposite sign compared to \mathbf{g}_0 and for which $|\mathbf{g}_k|^2$ is minimal. If such a point does not exist, simply select the point where $|\mathbf{g}(\mathbf{X}_k)|^2$ is minimal, set $\mathbf{X}_b = (\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_0)/2$, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_b$ and go back to step (b)
- (e) Define the new candidate $\mathbf{X}_b = (\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_0)/2$
- (f) If $|\mathbf{g}(\mathbf{X}_b)| < 10^{-10}$ a fixed/periodic point has been identified. Else,
- (g) Update $d = \|\mathbf{X}_b - \mathbf{X}_0\|_\infty$, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_b$ and go back to step (b).

REFERENCES

- ÅKERVIK, E., BRANDT, L., HENNINGSON, D. S., HØEPFFNER, J., MARXEN, O., AND SCHLATTER, P. 2006 Steady solutions of the Navier-Stokes equations by Selective Frequency Damping, *Physics of Fluids*, **18**, 068102
- AMON, C. H., GUZMÁN, A. M., AND MOREL, B. 1996 Lagrangian chaos, Eulerian chaos, and mixing enhancement in converging-diverging channel flow, *Physics of Fluids*, **8**(5)
- AREF, H. 1984 Stirring by chaotic advection, *J. Fluid Mech.*, **143**, 1-21
- AREF, H. 2014 Frontiers of chaotic advection, *arXiv:1403.2953v1*,
- ARTUSO, R. 1999, Correlation decay and return time statistics, *Physica D*, **131**, 68-77
- ARTUSO, R., AND MANCHEIN, C. 2009 Instability statistics and mixing rates, *Physical Review E*, **80**, 036210
- BIEMOND, J. J. B., DE MOURA, A. P. S., GREBOGI, G. K. C., AND NIJMEIJER, H. 2008 Onset of chaotic advection in open flows, *Physical Review E*, **78**, 016317
- BUDYANSKY, M., ULEYSKY, M., AND PRANTS, S. 2004 Hamiltonian fractals and chaotic scattering of passive particles by a topographical vortex and an alternating current, *Physica D*, **195**, 369-378
- BURROUGHS, E. A., ROMERO, L. A., LEHOUCQ, R. B., AND SALINGER, A. G. 2002 Linear stability of flow in a differentially heated cavity via large-scale eigenvalue calculations, *Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow* **14**, 803-822
- CENCINI, M. AND CECCONI, F., AND VULPIANI, A. 2010 Chaos: From Simple Models to Complex Systems, *World Scientific*, Series on advances in statistical mechanics
- CHABREYRIE, R., CHANDRE, C., SINGH, P., AND AUBRY, N. 2011 Complete Chaotic Mixing in an Electro-osmotic Flow by Destabilization of Key Periodic Pathlines, *Physics of Fluids* **23**, 072002
- FALKOVICH, G. 2004 Mixing in Encyclopedia of Nonlinear Science, *Routledge, New York*, Ed. A. Scott
- FEUDEL, F., WITT, A., GELLERT, M., KURTHS, J., GREGOBI, C., AND SANJUÁN, M. A. F. 2005 Intersections of stable and unstable manifolds: the skeleton of Lagrangian chaos, *Chaos, Solitons and Fractals*, **24**, 947-956
- FOUNTAIN, G. O. KHAKHAR, D. V., MEZIC, I. AND OTTINO, J. M. 2000 Chaotic mixing in a bounded three-dimensional flow *Journal of Fluid Mechanics* **417**, 265-301
- GOUILLART, E., DAUCHOT, O., DUBRULLE, B., ROUX, S., AND THIFFEAULT, J.-L. 2008 Slow decay of concentration variance due to no-slip walls in chaotic mixing, *Physical Review E* **78**, 026211
- GRIGORIEV, R., AND SCHUSTER, H.G. 2011 Transport and Mixing in Laminar Flows: From Microfluidics to Oceanic Currents *Wiley-VCH*
- GUCKENHEIMER, J., AND HOLMES, P. 1983 Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, *Springer-Verlag, New York*, Applied mathematical sciences
- HACKBORN, W.W., ULUCAKLI, M.E., AND YUSTER, T. 1997 A theoretical and experimental study of hyperbolic and degenerate mixing regions in a chaotic Stokes flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **346**, 23-48
- JUNG, C., TÉL, T., AND ZIEMNIAK, E. 1993 Application of scattering chaos to particle transport in a hydrodynamical flow, *Chaos*, **3** 555
- LAI, Y.-C., AND TÉL, T. 2011 Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales, **173**, *Springer, New York*
- LE QUÉRÉ, P., AND BEHNIA, M. 1998 From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity, *Journal of Fluid Mechanics*, **359**, 81-107
- MELNIKOV, V. K. 1963 On the stability of the center for time periodic perturbations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12**, 1
- MERCADER, I., BATISTE, O., AND RUIZ, X. 2004 Quasi-Periodicity and Chaos in a Differentially Heated Cavity, *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, **18**, 221-229
- MERCADER, I., BATISTE, O., RAMIREZ-PISCINA, L., RUIZ, X., RÜDIGER, S., AND CASADEMUNT, J. 2005 Bifurcations and chaos in single-roll natural convection with low Prandtl number, *Physics of Fluids*, **17**, 104108
- MITCHELL, R. JR., AND GRIGORIEV, R. O. 2012 Instabilities and mixing in two-dimensional Kolmogorov flow, *arXiv:12122890*

- NEUFELD, Z., AND TÉL, T. 1998 Advection in chaotically time-dependent open flows, *Physical Review E*, **57**(3)
- OTTINO, J. M. 1990 The kinematics of mixing : stretching, chaos and transport, *Cambridge University Press*
- OTT, E., AND TÉL, T. 1993 Chaotic scattering: An introduction, *Chaos*, **3**(417)
- PAOLUCCI, S., AND CHENOWETH, D. R. 1989 Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity, *Journal of Fluid Mechanics*, **201**, 379-410
- PEACOCK, T. AND DABIRI, J. 2010 Lagrangian coherent structures, *Chaos*, **20**, 017501
- PIKOVSKY, A., AND POPOVYCH, O. 2003 Persistent patterns in deterministic mixing flows, *Europhysics Letters*, **61**, 625-631
- POINCARÉ, H. 1892 Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, *Gauthier-Villars*, Paris
- PRATTA, L. J., RYPINA, I. I., ÖZGÖKMEN, T. M., WANG, P., CHILDS, H., AND BEBIEVA, H. 2014 Chaotic advection in a steady, three-dimensional, Ekman-driven eddy, *Journal of Fluid Mechanics* **738**, 143 -183
- RAVI, M. R., HENKES, R. A. W. M., AND HOOGENDOORN, C. J. 1994 On the high-Rayleigh-number structure of steady laminar natural-convection flow in a square enclosure, *Journal of Fluid Mechanics*, **262**, 325-351
- ROM-KEDAR, V., LEONARD, A., AND WIGGINS, S. 1990 An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **24**, 347-394
- SALMAN, H. AND HAYNES, P. H. 2007 A numerical study of passive scalar evolution in peripheral regions, *Physics of Fluids*, **19**, 067101
- STOLOVITZKY, G., KAPER, T. J., AND SIROVICH, L. 1995 A simple model of chaotic advection and scattering, *Chaos*, **5**(4)
- STREMLER, M. A. 2008 Mixing measures, *Encyclopedia of microfluidics and nanofluidics*, Springer US
- STURMAN, R. AND OTTINO, J. M., AND WIGGINS, S. 2006 The Mathematical Foundations of Mixing: The Linked Twist Map as a Paradigm in Applications: Micro to Macro, Fluids to Solids, *Cambridge University Press*, Cambridge
- TRIC, E., LABROSSE, G., AND BETROUNI, M. 2000 A first incursion into the 3D structure of natural convection of air in a differentially heated cavity from accurate numerical solutions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **43**, 4043-4056
- WIGGINS, S. 1988 Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods, *Springer-Verlag, New-York*, **73**, Applied Mathematical Sciences Series
- WIGGINS, S., AND OTTINO, J. M. 2004 Foundations of chaotic mixing, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **362**
- XIN, S., AND LE QUÉRÉ, P. 1995 Direct numerical simulations of two-dimensional chaotic natural convection in a differentially heated cavity of aspect ratio 4, *Journal of Fluid Mechanics*, **304**, 87-118
- XIN, S., AND LE QUÉRÉ, P. 2006 Natural-Convection in Air-Filled, Differentially Heated Cavities with Adiabatic Horizontal Walls, *Numerical Heat Transfer, Part A*, **50**, 437-466
- XIN, S., AND LE QUÉRÉ, P. 2012 Stability of two-dimensional (2D) natural convection flows in air-filled differentially heated cavities: 2D/3D disturbances *Fluid Dynamics Research*, **44**, 031419
- ZIEMNIAK, E. M., JUNG, C., AND TÉL, T. 1994 Tracer dynamics in open hydrodynamical flows as chaotic scattering, *Physica D*, **76**, 123-146

3.7 Conclusion et perspectives

La première approche proposée dans notre étude sur le mélange dans la cavité différentiellement chauffée $2D$, en régime périodique, considère une généralisation d’une approche par diffraction. Elle consiste, dans le cas des écoulements ouverts, à mesurer le temps et la position avec lesquels une particule s’échappe d’une selle chaotique (traduction littérale de *chaotic saddle*) de l’écoulement. Nous avons étendu cette idée au cas des écoulements confinés en relevant les temps de retour d’un ensemble de traceurs, par deux procédés distincts. Le premier consiste à placer l’ensemble de particules au temps initial suivant un segment donné, le second considère une source ponctuelle de traceurs libérant une nouvelle particule à chaque pas de temps Δt . Dans les deux cas les temps de retour des particules au segment considéré ont été analysés de façon statistique. Cette étude a révélé l’existence de zones distinctes de l’écoulement dans lesquelles les trajectoires sont soit hyperboliques, et constituent des zones de mélange (zones A_i de la figure 3.7b), soit non-hyperboliques (zones N_i de la figure 3.7b). Cette caractérisation, réalisée en temps continu pour une seule valeur de Ra , constitue une première approche de la caractérisation de l’écoulement instationnaire du point de vue lagrangien.

Les autres démarches proposées dans notre étude sont réalisées dans la section stroboscopique II. En calculant les fonctions de Melnikov à partir des points fixes hyperboliques de l’écoulement stationnaire, nous avons prédit les premières zones responsables du mélange. Les connexions homoclines et hétéroclines issues des points fixes de l’écoulement stationnaire ($\Gamma_{i,j}$ sur la figure 3.7a) deviennent, en dynamique périodique, des enchevêtrements homo/hétéroclines responsables d’une dynamique localement chaotique et donc de mélange. Le fait que cette déstabilisation se produise dès l’apparition de l’instationnarité suggère que l’apparition du mélange dans l’écoulement coïncide avec l’apparition de l’instationnarité.

En comparant les temps de retour associés aux lignes de courant (fermées) de l’état stationnaire, nous avons été en mesure de déterminer de façon qualitative les zones de résonance des tores KAM et avons montré que les zones où les trajectoires de particules sont non-hyperboliques (zones N_i sur la figure 3.7b) coïncident avec la présence de tores KAM résonants.

L’introduction des *partial spreading maps* (cartes de dispersion associées à un point périodique hyperbolique. Ces cartes sont constituées de deux disques de particules initialement placés autour du point périodique et itérés en avant et en arrière dans II) nous permet de caractériser le potentiel mélangeant associé à un point hyperbolique de l’écoulement. La superposition de nombreuses cartes de dispersion partielles sous la forme d’une carte globale (*total spreading map*) nous permet de caractériser le potentiel mélangeant de l’écoulement pour une valeur de Ra donnée. Ces cartes de mélange global nous donnent accès à la fraction de chaos C présente dans le système. Nous avons montré que lorsque C tend vers 100%, le mélange dans la cavité peut être considéré comme global, et non plus partiel.

Nous avons également estimé numériquement le taux de mélange du système pour la valeur de Ra la plus élevée. Pour cette valeur, la variance de la concentration décroît en temps selon une loi de puissance. Ce comportement suggère la dominance d’effets non-hyperboliques à temps long (tels que la persistance de tores KAM). Les murs de la cavité agissant eux-mêmes comme des tores non-résonants, nous n’attendons pas que cette dernière observation change quelque soit la valeur de Ra [29].

Une première perspective à cette étude est d’étendre nos observations aux cas des écoulements apériodiques. Dans ce cas, les méthodes de Melnikov et l’existence de tores KAM n’ont plus d’équivalent. Cependant les approches par diffraction et ensemencement fonctionnent encore et sont prometteuses.

La seconde perspective consiste à étudier le mélange de traceurs diffusifs. Cela peut être réalisé en ajoutant un bruit blanc gaussien dans le mouvement des particules [64]. Il est alors attendu que le caractère non-hyperbolique soit remplacé par un caractère hyperbolique à temps long [66]. L’autre possibilité est de résoudre le champ de concentration à nombre de Schmidt (Sc) fini. En raison du coût numérique, suivant la valeur de Sc , l’une ou l’autre de ces méthodes devrait être

privilegiée. Rappelons l'échelle de Batchelor introduite au §3.1 $\eta_c \sim Sc^{-1/2}$ comme la plus petite échelle agissant sur le champ de concentration $C(\mathbf{X}, t)$. Si $Sc \ll 1$, la résolution numérique de $C(\mathbf{X}, t)$ peut être bien moins coûteuse que la résolution numérique d'un grand nombre de traceurs par l'équation d'advection. À l'inverse, pour $Sc \gg 1$, l'approche par ajout de bruit blanc peut être numériquement plus rentable que la résolution de $C(\mathbf{X}, t)$.

La troisième perspective de cette étude consiste à considérer des particules de taille finie, comme dans le cas, par exemple, de particules d'aérosols se dispersant dans l'air. La particule rétroagit alors sur l'écoulement en introduisant une force de traînée. L'équation d'advection est modifiée par l'ajout de plusieurs termes [14] :

1. la poussée d'Archimède, si la particule et le fluide n'ont pas la même densité ;
2. la traînée de Stokes et la correction de Faxen ;
3. un effet de masse ajouté ;
4. la force de Basset. Cette force agit comme un effet de mémoire pour le traceur : le traceur a, sur une certaine échelle de temps, connaissance de son passé qui interagit sur sa trajectoire actuelle.

Dans le cas où la particule est très petite devant la taille caractéristique du fluide, les effets de masse ajoutée et de la force de Basset peuvent être négligés. Alors, l'équation d'advection devient :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} &= \beta \frac{D\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{Dt} + \frac{\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{V}}{\tau_p} + (1 - \beta)\mathbf{g},\end{aligned}\tag{3.8}$$

avec $(\dot{})$ la dérivée temporelle, \mathbf{U} la vitesse du fluide, β le rapport de densité entre la particule et le fluide et τ_p l'échelle de temps de Stokes (dépendante de β , de la viscosité du fluide et de la taille de la particule), qui caractérise le temps que met la particule à répondre à un changement de la vitesse du fluide (ou inertie de la particule). Les équations (3.8) sont dissipatives, contrairement à l'équation d'advection utilisée dans notre étude [14]. Il est dès lors attendu que les résultats sur le mélange dans l'écoulement soient fortement modifiés par la considération de ces effets inertiels.

La quatrième perspective à l'étude est de considérer un écoulement tridimensionnel. La prise en compte d'un troisième degré de liberté en espace fait que les trajectoires de particules peuvent être chaotiques même dans le cas d'un écoulement stationnaire. En pratique toutefois, ces écoulements $3D$ stationnaires pour lesquels l'advection de traceurs passifs est chaotique sont peu nombreux et sont créés à partir de géométrie complexes tel que des tubes en S dans le cas de mélangeurs en microfluidique [37]. C'est pourquoi, dans la plupart des écoulements tridimensionnels, l'instationnarité reste le moyen le plus efficace de pouvoir mélanger. Cependant, suivant les symétries du système étudié, il est possible que la dynamique lagrangienne puisse être considérée, si ce n'est $2D$, comme quasi- $2D$. Dans ce cas, des phénomènes similaires à ceux des écoulements bidimensionnels (tels que les tores KAM et les enchevêtrements homo/hétéroclines) apparaissent du point de vue lagrangien [25], [67]. Néanmoins, le mélange dans les fluides $3D$ est un sujet de recherche récent et peu d'études existent dans ce domaine (voir [5] pour une récente révision sur le mélange). Le sujet reste donc ouvert quand aux techniques et concepts de l'advection chaotique $2D$ pouvant être étendus dans les cas pleinement $3D$.

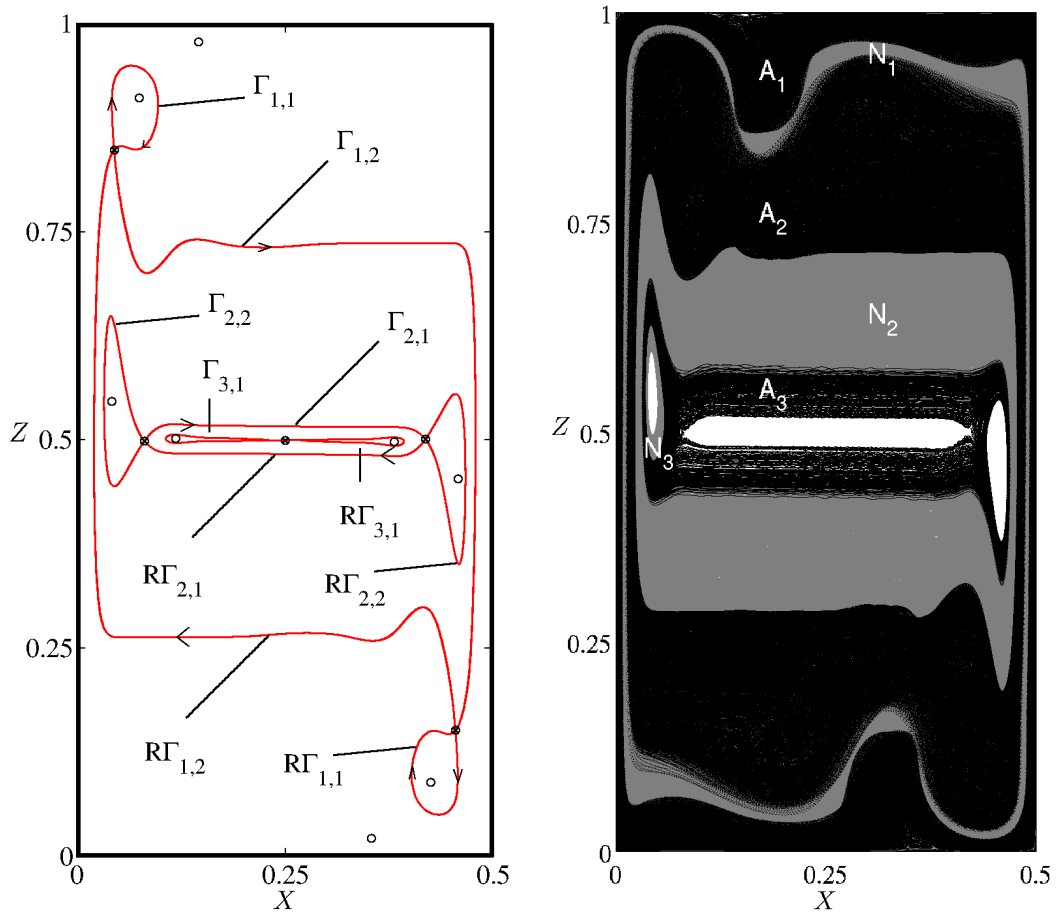


FIGURE 3.7 – (a) Points fixes de l'écoulement stationnaire pour $Ra = 1.625 \times 10^8$. Les variétés stables et instables des points fixes hyperboliques (cercles pleins) forment des trajectoires homoclines et hétéroclines (en rouge, nommées $\Gamma_{n,m}$ où n et m correspondent au numéro attribué au point fixe). Les points fixes elliptiques déterminent les centres de zones de recirculation (cercles vides). (b) Répartition des trajectoires de particules dans les zones hyperboliques (zones A_i en noir) et non-hyperboliques (zones N_i en gris). ([Retour au texte](#))

Route vers le chaos eulérien

Dans ce chapitre, nous revisitons en détail le scénario de transition vers le chaos pour l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$, à rapport d'aspect 2, $Pr = 0.71$. Nous avons vu au chapitre 2 que le scénario jusqu'alors établi comprenait deux routes en compétition (une route centro-symétrique CS , l'autre non centro-symétrique NCS) présentant un scénario de transition à la Ruelle-Takens [69], [57] de la forme $T^0 \rightarrow T^1 \rightarrow T^2 \rightarrow \text{Chaos/turbulence}$. Nous montrons dans ce chapitre que ce scénario est incomplet, en mettant en évidence l'existence d'une vingtaine de nouvelles dynamiques jusqu'alors non-répertoriées.

Du fait de la multitude de dynamiques identifiées, nous avons choisi de présenter ce chapitre sous la forme d'une liste ordonnée des dynamiques identifiées sur différentes plages de Ra : le §4.1 concerne les dynamiques non-centro symétriques (NCS) issues de la dynamique T^2 . Au §4.2, nous montrons les dynamiques centro-symétriques (CS) issues de la dynamique T_C^2 . Le §4.3 décrit de nouvelles dynamiques évoluant proche du sous-espace CS , mais restant déconnectées des dynamiques NCS issues de T^2 . Ces trois premiers paragraphes concernent des valeurs de Ra comprises entre 2.05×10^8 et 2.9×10^8 . Le §4.4 présente les dynamiques trouvées au-delà de 2.9×10^8 , en terminant à $Ra = 4.0 \times 10^8$. Cette valeur a été choisie car la dynamique identifiée y est suffisamment chaotique pour pouvoir être considérée comme 'turbulente'.

Les diagrammes de bifurcations qualitatifs et quantitatifs obtenus sont présentés au §4.5. Nos conclusions et perspectives à cette étude de transition vers le chaos sont présentées au §4.6.

Pour ne pas alourdir la lecture de ce chapitre, seuls les signes des exposants de Lyapunov (voir annexe A.2) sont présentés dans ce chapitre sous la forme $+$ pour les exposants positifs, 0 pour les exposants nuls et $-$ pour les exposants négatifs. Les valeurs numériques associées sont regroupées sur le tableau A.3 présenté en annexe.

Sommaire

4.1	Dynamiques non centro-symétriques issues de T^2	68
4.2	Dynamiques centro-symétriques issues de T_C^2	73
4.3	Dynamiques proches du sous-espace centro-symétrique	80
4.4	Au delà de $Ra = 2.9 \times 10^8$	85
4.4.1	Dynamiques non centro-symétriques quasipériodiques	86
4.4.2	Dynamiques chaotiques non centro-symétriques	88
4.4.3	Dynamiques centro-symétriques	88
4.4.4	Fenêtres de périodicité	88
4.4.5	Hyperchaos	94
4.5	Diagrammes de bifurcations	99
4.6	Conclusions et perspectives	107

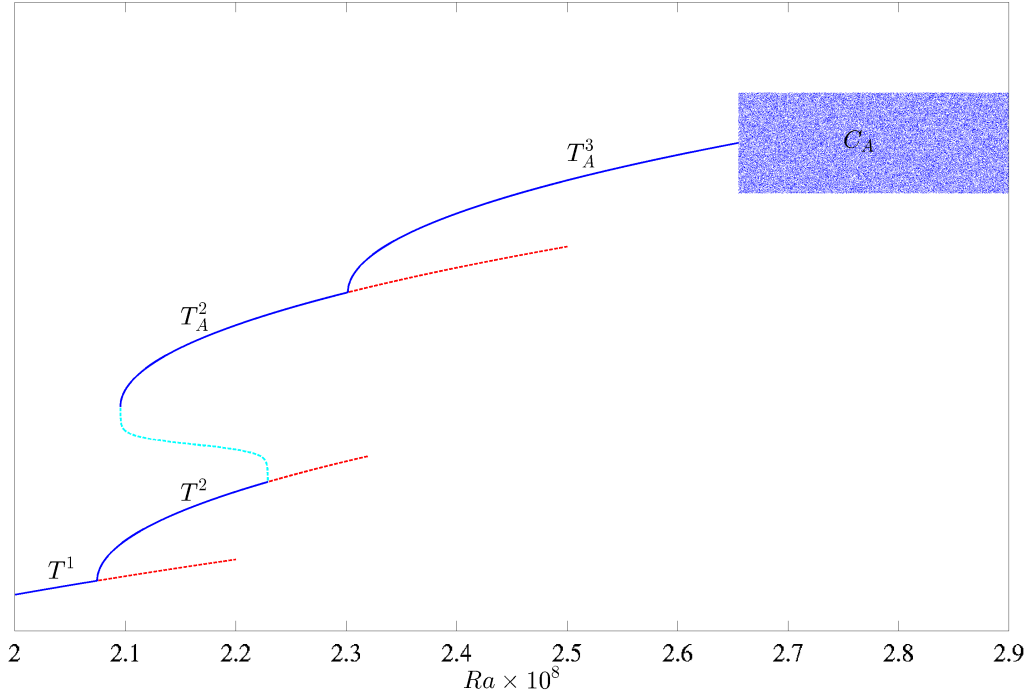


FIGURE 4.1 – Schéma des dynamiques *NCS* : T^2 , T_A^2 , T_A^3 et C_A . Les dynamiques stables sont représentées en bleu foncé, les instables en rouge. Les dynamiques instables supposées sont représentées en pointillés rouges. La courbe bleu clair indique l'existence supposée d'une dynamique instable connectant les solution T^2 et T_A^2 . Le nuage de points représente la dynamique chaotique C_A . Dans cette représentation, T_A^2 n'est pas différenciée de RT_A^2 . ([Retour au texte](#))

4.1 Dynamiques non centro-symétriques issues de T^2

Ce paragraphe présente les dynamiques *NCS* issues des bifurcations $T^0 \rightarrow T^1 \rightarrow T^2$ reportées par [82], [11] et détaillées au chapitre 2. Les trois dynamiques présentées dans ce paragraphe sont une dynamique non-symétrique S , nommée T_A^2 , que nous pensons issue de la dynamique T^2 via une bifurcation fourche sous-critique. La dynamique T_A^2 bifurque ensuite vers une dynamique à trois fréquences incommensurables, nommée T_A^3 . La dernière dynamique présentée ici est une dynamique chaotique, issue de la dynamique T_A^3 , nommée C_A . Un diagramme de bifurcation schématique associé à ce paragraphe est présenté sur la figure 4.1.

Tores T_A^2 : Pour $Ra = 2.0956 \times 10^8$, deux branches solutions (nommées T_{A+}^2 et T_{A-}^2) existent simultanément à la branche T^2 . Comme représenté sur la figure 4.2a, ces deux branches sont symétriques l'une de l'autre par une rotation d'angle π et ne vérifient pas la propriété S . La représentation des modes de couche limite associés à T_{A+}^2 et T_{A-}^2 est donnée sur les figures 4.3 (seconde et troisième lignes) où la symétrie de ces deux régimes se caractérise par des rouleaux plus énergétiques dans la partie haute (cas T_{A+}^2) ou dans la partie basse (cas T_{A-}^2) de la cavité. Du fait de la symétrie de T_{A+}^2 et T_{A-}^2 , il est attendu que toute bifurcation affectant l'une d'entre elle affecte l'autre de façon symétrique.

Les symétries reliant T_{A+}^2 et T_{A-}^2 (désignées par la suite par T_A^2) indiquent que ces deux dynamiques sont issues d'une bifurcation fourche. Or, la seule dynamique stable de laquelle ces deux solutions pourraient être issues est la dynamique T^2 (seule dynamique *NCS* existante autre que T_A^2 pour ces valeurs de Ra). La branche T^2 a pu être suivie jusqu'à $Ra = 2.29 \times 10^8$ suggérant que si la branche T_A^2 est issue de la branche T^2 , cela doit être via une bifurcation fourche se produisant vers $Ra \approx 2.29 \times 10^8$. Dans ce cas, la bifurcation permettant l'apparition des dynamiques T_A^2 est une bifurcation fourche sous-critique. Si cette bifurcation fourche est bien celle adoptée par le système,

alors la dynamique T^2 doit encore exister sous forme instable pour $Ra \gtrsim 2.29 \times 10^8$.

La coexistence des dynamiques T^2 et T_A^2 est présentée sous la forme d'un diagramme de bifurcation représentant l'évolution des pulsations $\omega_e^{T^2}$ et $\omega_e^{T_A^2}$ avec Ra (Fig. 4.2b). L'hystérésis présumé y est représenté par la discontinuité existant entre la courbe d'évolution de $\omega_e^{T^2}$ (rouge) et celle de $\omega_e^{T_A^2}$ (bleue).

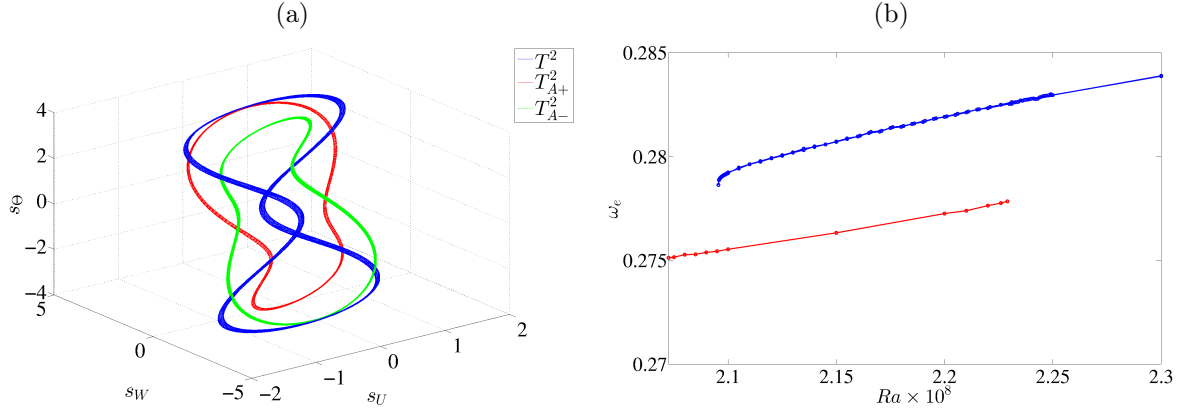


FIGURE 4.2 – (a) Dynamique T^2 (bleu), T_{A+}^2 (rouge) et son symétrique T_{A-}^2 (vert) à $Ra = 2.1 \times 10^8$. (b) $\omega_e = f(Ra)$. Rouge : dynamique T^2 . Bleu : dynamiques T_A^2 . ([Retour au texte](#))

Tores T_A^3 : En faisant varier $Ra \in [2.0315, 2.0325] \times 10^8$ par pas de 2×10^4 , nous remarquons que pour $Ra = 2.3017 \times 10^8$, le portrait de phase de l'attracteur, articulé autour des tores T_A^2 , s'épaissit (Fig. 4.4.a). Une section de Poincaré définie par $hs_W = 0, dhs_W/dt > 0$ (Fig. 4.4.b) dessine une surface. L'observation du signal $s(t)$ (Fig. 4.4.c) révèle la présence d'une très basse pulsation à $\omega_{TBF} \approx 0.004$. A cette valeur de Ra , $\omega_e \approx 0.2845$ conduisant à $\omega_e/\omega_{TBF} \approx 71$. Les trois premiers exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ (Fig. 4.4.d). L'ensemble de ces indicateurs suggère que la dynamique observée est de type T^3 (nommée T_A^3). La solution T_A^2 aurait donc subi une bifurcation de Hopf autour de $Ra = 2.3017 \times 10^8$. Le mode en température associé ω_{TBF} (Fig. 4.5) montre que la plupart de l'énergie contenue dans ce mode basse pulsation est concentrée dans les zones hautes (cas T_{A+}^3) ou basse (cas T_{A-}^3) de la cavité. Ce mode caractérise une onde dont la pulsation est très petite devant la pulsation de Brunt-Väisälä. En comparant la partie réelle des coefficients de Fourier à leur partie imaginaire, nous constatons que l'onde obtenue semble quasi-stationnaire.

Chaos C_A : En réalisant une exploration sur $Ra \in [2.645, 2.653] \times 10^8$ par pas de 2×10^5 , nous remarquons qu'autour de $Ra = 2.649 \times 10^8$, le portrait de phase de T_A^3 se 'brouille' (Fig. 4.6a). Le plus grand exposant de Lyapunov pour $Ra = 2.649 \times 10^8$ est estimé à $\lambda_1 > 0$, ce qui traduit une dynamique chaotique (Figs. 4.6c et d). L'observation du portrait de phase (Fig. 4.6a) révèle que ce chaos, nommé C_A , s'articule autour de T_A^3 . En augmentant Ra l'attracteur autour duquel évolue la dynamique semble subir un doublement de période (voir Fig. 4.6b). Cette nouvelle dynamique, perd son comportement chaotique pour $Ra \simeq 2.90 \times 10^8$ et devient une dynamique quasi-périodique à trois fréquences, nommée T_{A2}^3 , et décrite au §4.4.1.

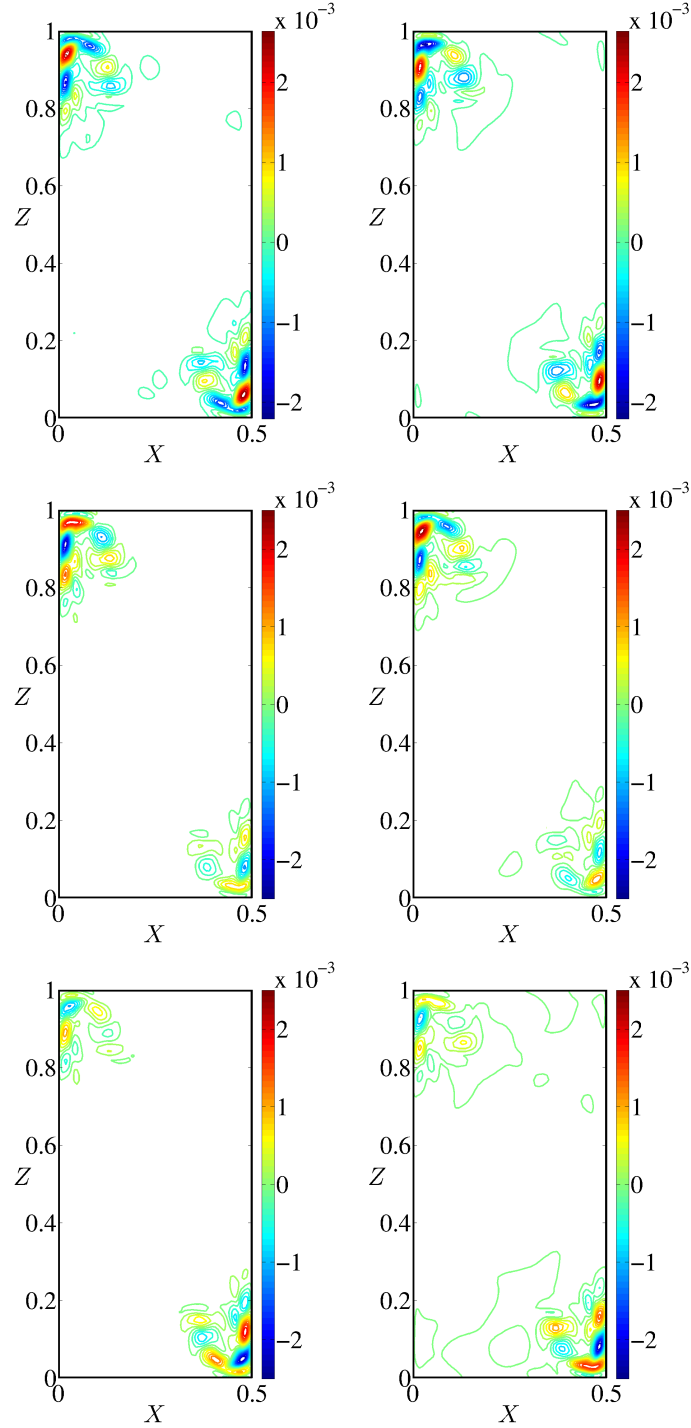


FIGURE 4.3 – Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation $\omega_p \approx 3.1$ des dynamiques $NCS T^2$ (première ligne), T_{A+}^2 (seconde ligne) et T_{A-}^2 (troisième ligne) pour $Ra = 2.1 \times 10^8$. Gauche : partie réelle (temps $t = 0[2\pi]$), droite : partie imaginaire (temps $t = -\pi/(2\omega_p)[2\pi]$). ([Retour au texte](#))

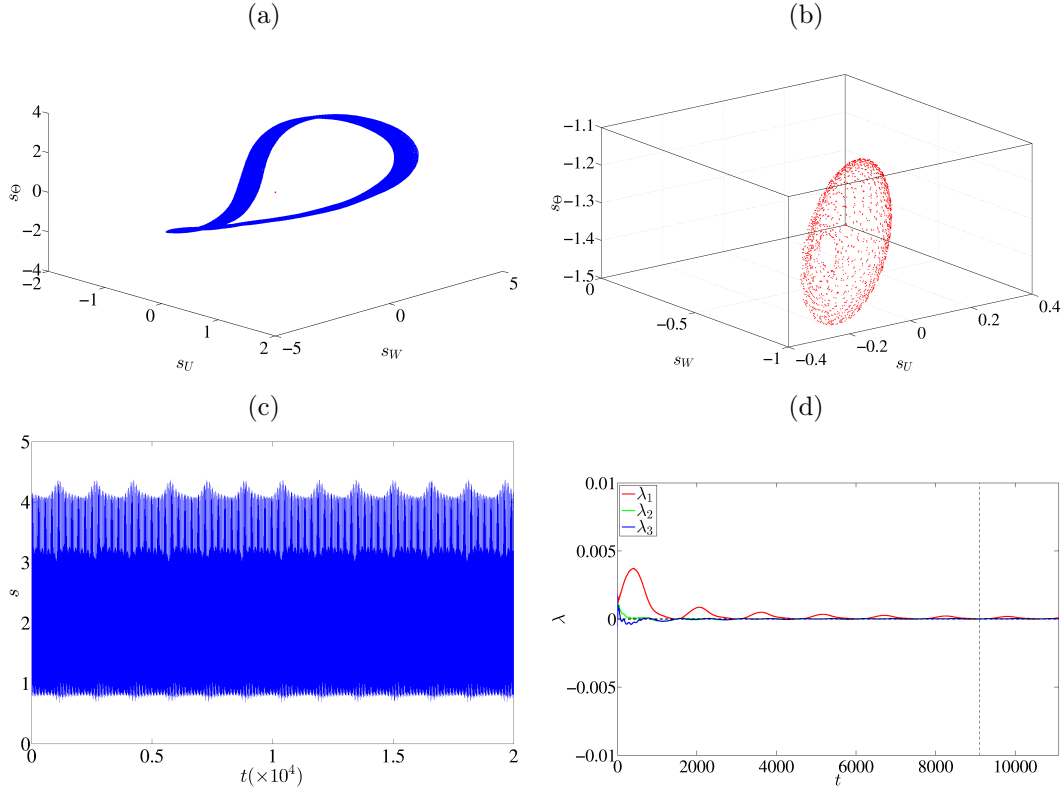


FIGURE 4.4 – $Ra = 2.35 \times 10^8$. (a) Portrait de phase en (s_U, s_W, s_Θ) . (b) Section de Poincaré prise à $hs_W = 0, dhs_W/dt > 0$. (c) $s(t)$. (d) $\lambda_i = f(t), i = 1, 2, 3$. Les trois premiers exposants de Lyapunov sont respectivement estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ pour $\tau_\lambda = 22$. Les λ_i sont évalués à partir des pointillés noirs. ([Retour au texte](#))

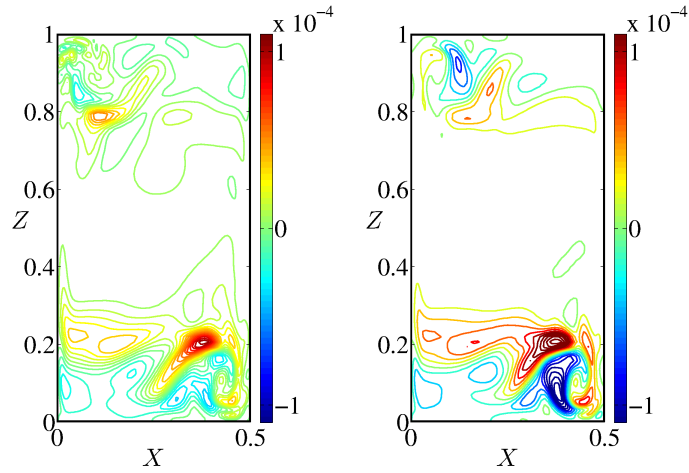


FIGURE 4.5 – Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation $\omega_{TBF} \approx 0.004$ du régime T_A^3 à $Ra = 2.35 \times 10^8$. Gauche : partie réelle (temps $t = 0[2\pi]$), droite : partie imaginaire (temps $t = -\pi/(2\omega_{TBF})[2\pi]$). ([Retour au texte](#))

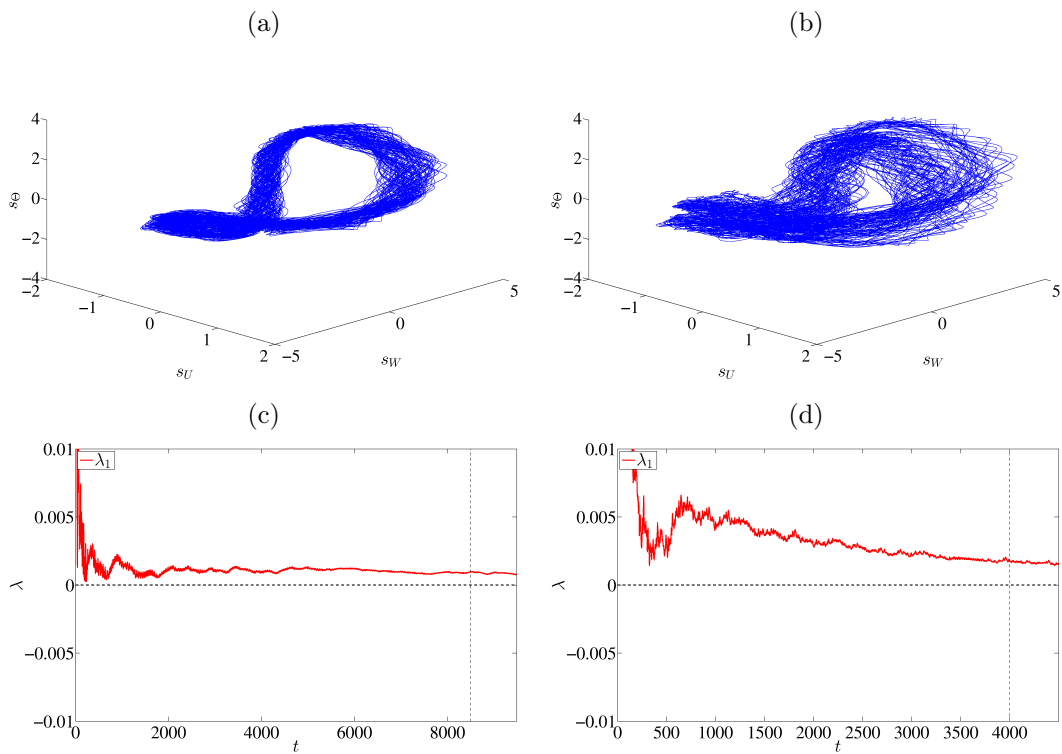


FIGURE 4.6 – (a) Chaos C_A autour de T_A^3 pour $Ra = 2.655 \times 10^8$. (b) Chaos C_A autour de T_{A2}^3 pour $Ra = 2.855 \times 10^8$. (c) $\lambda_1 = f(t)$ pour $Ra = 2.649 \times 10^8$. Le premier exposant de Lyapunov est estimé à $\lambda_1 > 0$ pour $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. (d) $\lambda_1 = f(t)$ pour $Ra = 2.855 \times 10^8$. Le premier exposant de Lyapunov est estimé à $\lambda_1 > 0$ pour $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. (c)-(d) : La valeur de λ_1 est évaluée à partir des pointillés noirs. ([Retour au texte](#))

4.2 Dynamiques centro-symétriques issues de T_C^2

Ce paragraphe présente les dynamiques centro-symétriques (CS) issues des bifurcations $T^0 \rightarrow T_C^1 \rightarrow T_C^2$ reportées par [82] et [11] et présentées au chapitre 2. Nous présentons cinq nouvelles dynamiques, nommées T_{C2}^3 , T_{C2}^2 , T_X^2 , T_{C3}^2 et C_X . D'après nos diagnostics, la dynamique T_{C2}^3 est une dynamique à trois fréquences incommensurables issue, via une bifurcation de Hopf, de la dynamique T_C^2 . En augmentant Ra , nous remarquons que deux des trois fréquences s'accrochent l'une à l'autre. Il en résulte une dynamique quasi-périodique à deux fréquences T_{C2}^2 . La dynamique T_{C2}^2 est instable autour de $Ra \simeq 2.599 \times 10^8$. Nous montrons l'existence d'une dynamique quasi-périodique à deux fréquences T_X^2 existant sur la même plage en Ra que T_{C2}^3 et T_{C2}^2 . La dynamique T_X^2 constituerait une dynamique hystérétique dont nous n'avons pas identifié la provenance. T_X^2 devient instable autour de $Ra \simeq 2.6 \times 10^8$ et est suivie en imposant la centro-symétrie du système. Une autre dynamique stable, de nature quasi-périodique à deux fréquences, nommée T_{C3}^2 existe pour les mêmes valeurs de Ra que T_X^2 . Autour de $Ra \simeq 2.65 \times 10^8$, la dynamique T_X^2 instable devient chaotique. Ce chaos est nommé C_X . Ces bifurcations sont présentées sous la forme d'un schéma sur la figure 4.7.

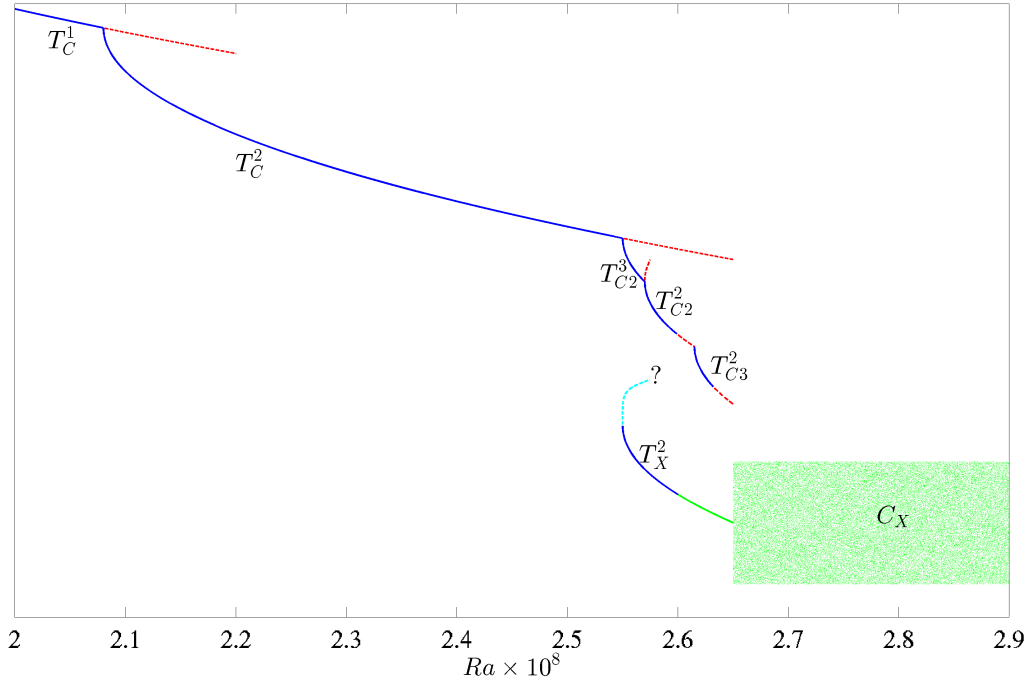


FIGURE 4.7 – Schéma des branches CS : T_C^2 , T_{C2}^3 , T_{C2}^2 , T_{C3}^2 , T_X^2 et C_X . Les dynamiques stables sont indiquées en bleu, les dynamiques instables supposées en pointillés rouges. Les dynamiques stables dans le sous-espace CS mais instables vis à vis de perturbations NCS sont en vert. Le nuage de point indique la dynamique chaotique C_X . La branche instable supposée de laquelle est issue T_X^2 est montrée en bleu clair. ([Retour au texte](#))

Les dynamiques T_{C2}^3 et T_X^2 ont été observées à partir de $Ra = 2.55 \times 10^8$. Ces deux branches ont été mises en évidence en parcourant la plage $Ra \in [2.5 : 0.01 : 2.6] \times 10^8$ et $Ra \in [2.54 : 0.001 : 2.55] \times 10^8$ pour raffiner le seuil d'apparition.

Tores T_{C2}^3 et T_{C2}^2 : Pour $Ra \approx 2.55 \times 10^8$, T_C^2 subit une bifurcation. Le portrait de phase de la solution obtenue évoque un tore (fig. 4.8a). Une section de Poincaré définie par $hs_U = 0, dhs_U/dt > 0$ (Fig. 4.8b, points verts) représente une surface, là où T_C^2 représente une ligne (Fig. 4.8b points rouges). Les trois premiers exposants de Lyapunov, pour $Ra = 2.55 \times 10^8$, sont évalués à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ (Fig. 4.8d). Le suivi de la pulsation ω_e exhibe une continuité avec

les dynamiques T_C^2 . L'ensemble de ces indicateurs suggère que cette nouvelle dynamique, nommée T_{C2}^3 , provient d'une bifurcation de Hopf de la solution T_C^2 .

Pour $Ra = 2.57 \times 10^8$, la section de Poincaré $hs_U = 0, dhs_U/dt > 0$ représente plusieurs lignes, au lieu d'une surface (Fig. 4.8b points bleus). À cette valeur de Ra , $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ (Fig. 4.8e) et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ pour $Ra = 2.59 \times 10^8$ (Fig. 4.8f). Ces indicateurs suggèrent que la dynamique toroïdale T_{C2}^3 présente un accrochage en fréquence sur $Ra \in]2.55, 2.57] \times 10^8$. La nouvelle dynamique obtenue, nommée T_{C2}^2 , est suivie jusqu'à $Ra = 2.597 \times 10^8$. Au delà de cette valeur de Ra , T_{C2}^2 n'est plus observé, que ce soit en imposant la centro-symétrie ou non. Si la symétrie CS n'est pas imposée, alors la dynamique transite vers l'intermittence décrite au §4.3. Ce seuil a été estimé en laissant évoluer la dynamique T_{C2}^2 sur $Ra \in [2.595 : 0.002 : 2.601] \times 10^8$.

Tores T_X^2 : La seconde branche stable de l'espace CS existe sur la plage $Ra \in [2.55, 2.65] \times 10^8$. Le portrait de phase (Fig. 4.10a) montre une structure toroïdale dont les branches sont plus séparées que celles de la dynamique T_{C2}^2 . Cette dynamique décrit un tore T^2 , nommé T_X^2 , stable dans l'espace CS jusqu'à $Ra \simeq 2.60 \times 10^8$ (Figs. 4.10c et d). La pulsation $\omega_e^{T_X^2} \approx \omega_e^{T_C^2}/5 \approx 0.0572$ diffère de celle de T_{C2}^2 . Le mode associé à $\omega_e^{T_X^2}$ est représenté en Fig. 4.9. Les perturbations en température associées restent concentrées loin du cœur de la cavité. Pour $Ra \geq 2.60 \times 10^8$, le suivi de la dynamique T_X^2 réalisé par centro-symétrie imposée, montre que T_X^2 existe toujours dans l'espace CS jusqu'à $Ra \simeq 2.65 \times 10^8$.

Nous ne savons pas d'où provient de la branche T_X^2 sinon qu'en décroissant Ra en-deçà de $Ra = 2.55 \times 10^8$, la branche T_X^2 se résorbe invariablement sur la branche T_C^2 . La branche T_X^2 est une dynamique dont l'origine reste inconnue.

Cycles limites T_X^1 : Pour $Ra \approx 2.616 \times 10^8$, la dynamique T_X^2 devient une dynamique périodique T^1 , nommée T_X^1 (Fig. 4.11a). Cette nouvelle solution existe sur $Ra \in [2.616, 2.626] \times 10^8$. Sa pulsation est $\omega_e^{T_X^1} \approx 0.0572$, et correspond à celle des dynamiques T_X^2 . Cette dynamique est instable vis à vis de perturbations NCS (Fig. 4.11c). Au delà de $Ra \simeq 2.626 \times 10^8$, la dynamique T_X^1 redevient une dynamique de type T_X^2 (Fig. 4.11d).

Ce passage d'une dynamique T^2 à T^1 est caractéristique d'un accrochage en fréquence entre les deux fréquences composant le régime T^2 . Lors de l'accrochage, $\omega_e^{T_X^2}$ devient commensurable à $\omega_p^{T_X^2}$ dans un rapport $\omega_p/\omega_e \approx 54$. Classiquement, l'accrochage résulte d'une bifurcation nœud-col, le décrochage d'une bifurcation nœud-col inverse. Lors de l'accrochage deux cycles limites sont créés. Le premier correspond à un cycle limite stable (ici T_X^1), le second à un cycle limite instable (non identifié dans le cas de nos travaux). Ce schéma de bifurcation est illustré sur la figure 4.12. Il doit être lu de gauche à droite pour la transition $T_X^2 \rightarrow T_X^1$ puis de droite à gauche pour la transition $T_X^1 \rightarrow T_X^2$. Ces accrochages en fréquence sont connus sous le nom de langue d'Arnold et se retrouvent fréquemment dans les systèmes présentant des dynamiques toroïdales [51].

Tores T_{C3}^2 et cycles limites T_{C3}^1 : À partir de $Ra \approx 2.615 \times 10^8$, une solution à symétrie CS , nommée T_{C3}^2 , existe de façon stable, y compris vis à vis de perturbations NCS (Fig. 4.13d). Au vu de la ressemblance des portraits de phase et de la pulsation enveloppe $\omega_e^{T_{C3}^2} \approx \omega_e^{T_C^1} \approx 0.2855$ (Fig. 4.13b), nous soupçonnons cette branche d'être issue de la branche T_{C2}^2 instable (Fig. 4.13a). La dynamique T_{C3}^2 se synchronise sur une dynamique périodique nommée T_{C3}^1 pour $Ra \in [2.629, 2.6321] \times 10^8$ (voir Fig. 4.13c). Cette synchronisation arrive plus tard en Ra que la synchronisation T_X^1 (située pour $Ra \in [2.616, 2.626] \times 10^8$). En sortie de la synchronisation T_{C3}^1 , la dynamique T_{C3}^2 devient instable vis à vis de perturbations NCS et CS . Au delà de $Ra = 2.6321 \times 10^8$, la dynamique T_{C3}^2 est perdue, que ce soit en imposant la centro-symétrie ou non. Ce seuil a été estimé en laissant la dynamique évoluer librement sur la plage $Ra \in [2.6319 : 0.0002 : 2.6329] \times 10^8$ et en imposant la centro-symétrie sur la plage $Ra \in [2.632 : 0.001 : 2.635] \times 10^8$.

Chaos C_X : À $Ra \approx 2.65 \times 10^8$, la branche solution CS T_X^2 est instable. Le portrait de phase de la nouvelle dynamique observée se structure autour des tores T_X^2 (Fig. 4.14a). Le nombre de pics

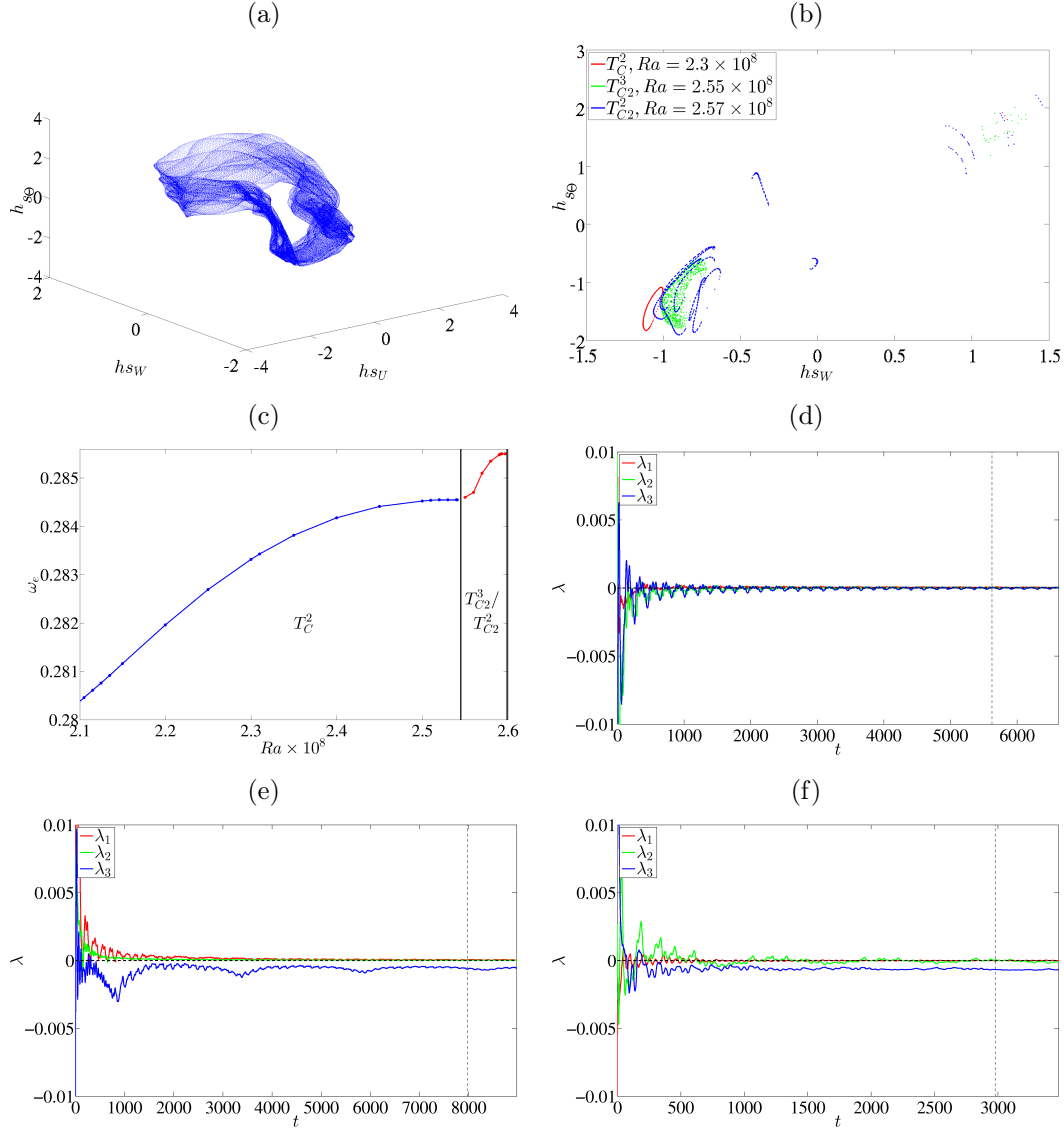


FIGURE 4.8 – (a) Portrait de phase T_{C2}^2 à $Ra = 2.57 \times 10^8$. (b) Section de Poincaré $h_{sU} = 0, dh_{sU}/dt > 0$. (c) Évolution de la pulsation ω_e pour les dynamiques T_C^2 , T_{C2}^3 et T_{C2}^2 . (d-f) Estimation des trois premiers exposants de Lyapunov en fonction de t . Les exposant de Lyapunov sont évalués sur la plage commencée par des pointillés noirs verticaux. Pour chacun des cas, $\tau_\lambda = 22$. (d) $Ra = 2.55 \times 10^8$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ (e) $Ra = 2.57 \times 10^8$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ (f) $Ra = 2.59 \times 10^8$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$. ([Retour au texte](#))

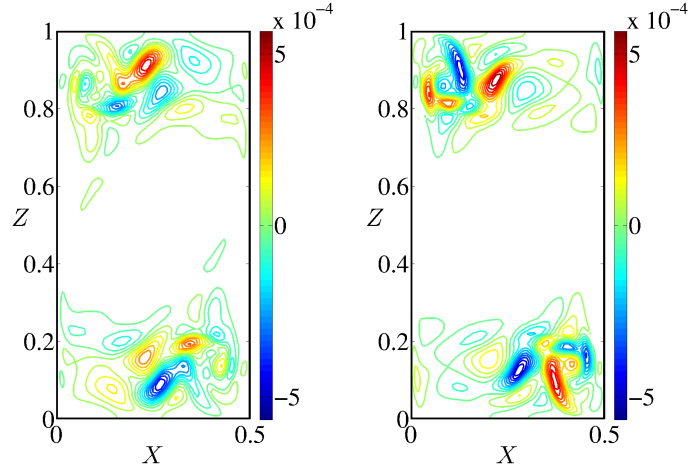


FIGURE 4.9 – Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation $\omega_e \approx 0.0572$ du régime T_X^2 à $Ra = 2.60 \times 10^8$. Gauche : partie réelle (temps $t = 0[2\pi]$), droite : partie imaginaire (temps $t = -\pi/(2\omega_e)[2\pi]$). ([Retour au texte](#))

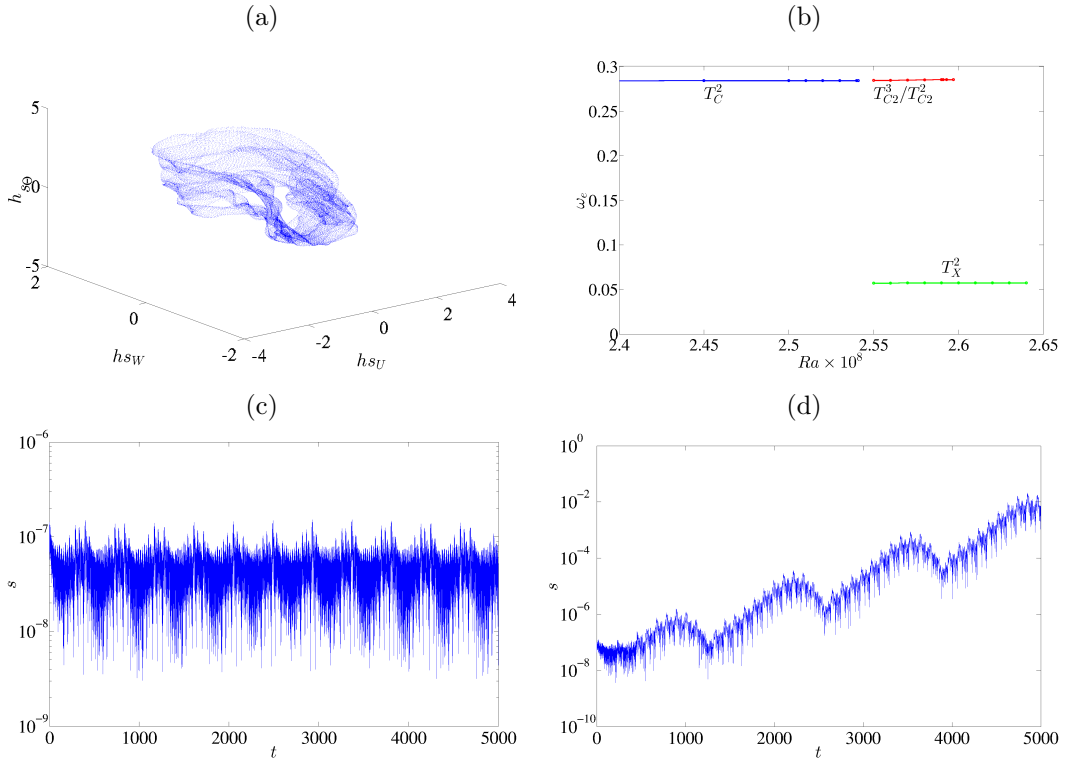


FIGURE 4.10 – (a) Portrait de phase de T_X^2 pour $Ra = 2.57 \times 10^8$. (b) Évolution des pulsations ω_e pour les régimes T_C^2 , T_{C2}^3 , T_{C2}^2 et T_X^2 . (c) Valeurs de $s(t)$ pour $Ra = 2.57 \times 10^8$. (d) $s(t)$ sans imposer la centro-symétrie pour $Ra = 2.60 \times 10^8$. Le taux de croissance hors de l'espace CS est estimé à $\lambda_\perp = 2.61 \times 10^{-3}$. ([Retour au texte](#))

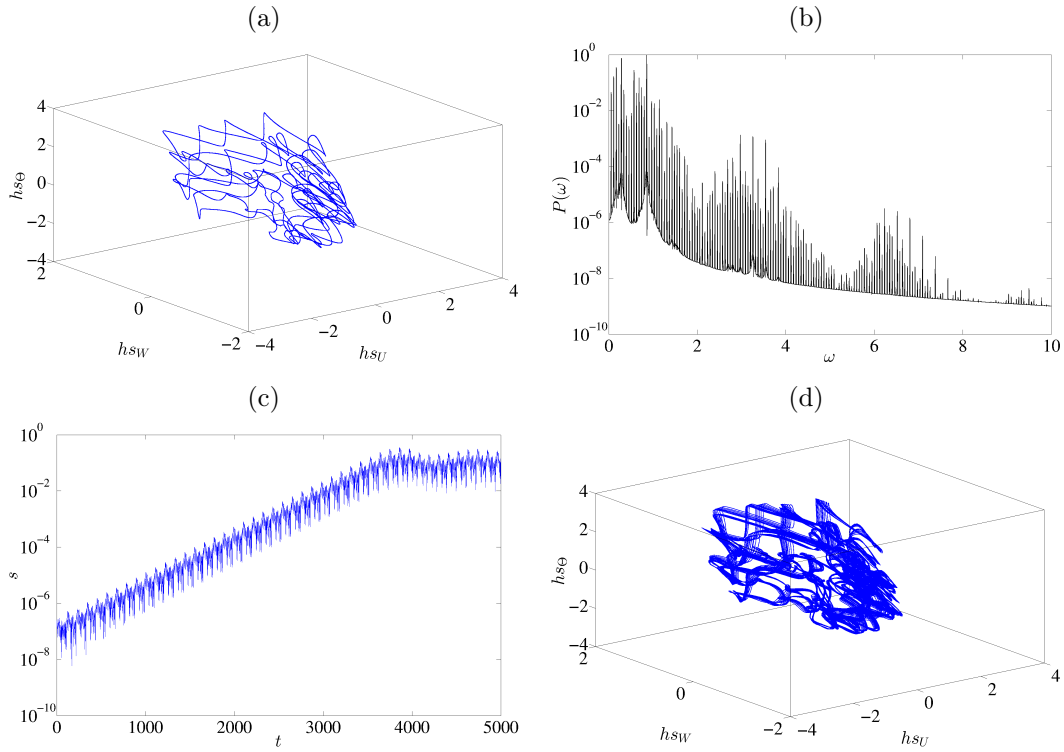


FIGURE 4.11 – Synchronisation T_X^1 . (a) Portrait de phase pour $Ra = 2.621 \times 10^8$. (b) Spectre en puissance à partir de la variable E_k à $Ra = 2.621 \times 10^8$. (c). $s(t)$ pour $Ra = 2.62 \times 10^8$ lorsque la centro-symétrie CS n'est plus imposée. Le taux de croissance vaut $\lambda_\perp = 3.78 \times 10^{-3}$. (d). Dynamique T_X^2 après la synchronisation T_X^1 pour $Ra = 2.626 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

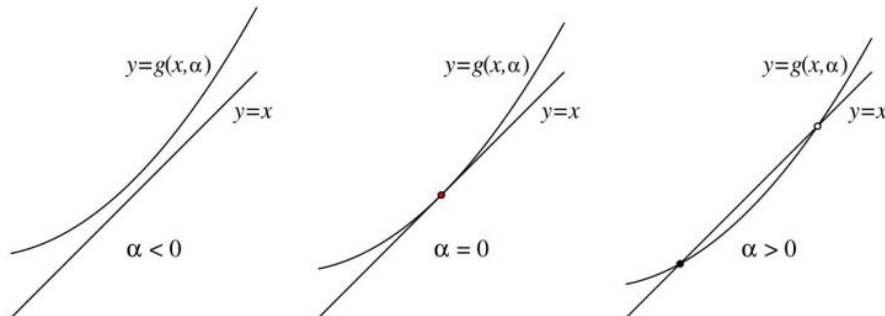


FIGURE 4.12 – Schéma générique d'une bifurcation nœud-col dans une application de premier-retour. À gauche : avant la bifurcation, au centre : au point de bifurcation, à droite : formation d'un point stable (ou nœud, point noir) et d'un point instable (ou col, point blanc). Image extraite de [42]. ([Retour au texte](#))

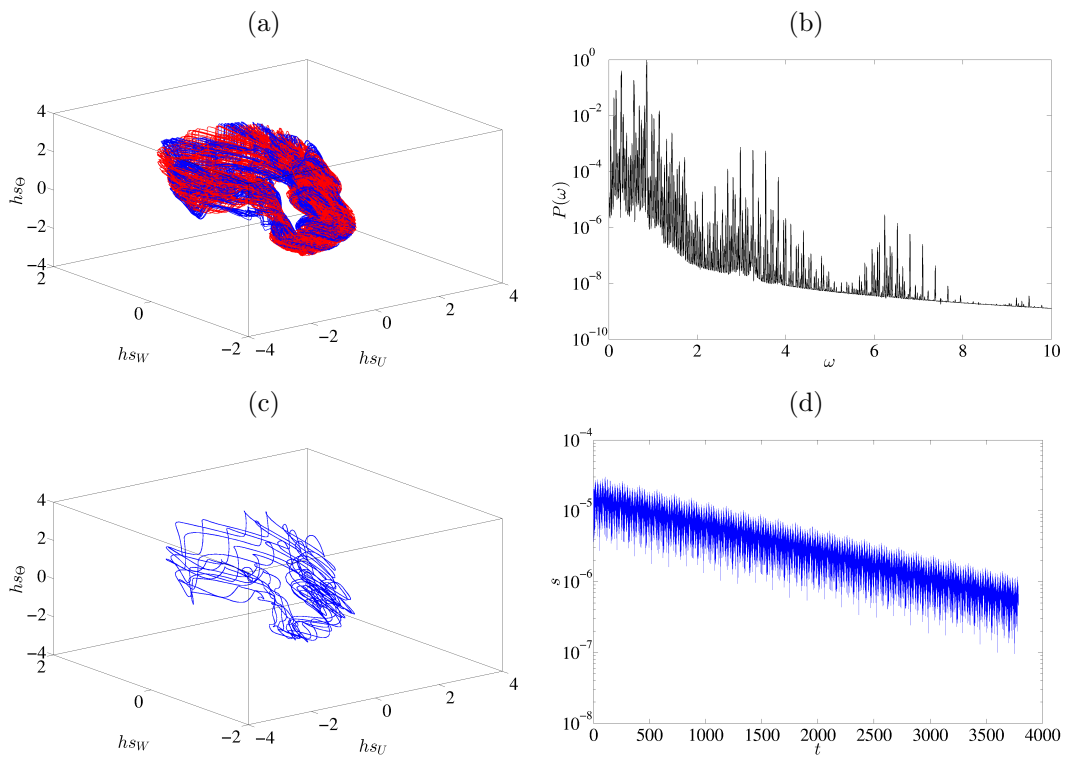


FIGURE 4.13 – (a) Bleu : dynamique T_{C3}^2 à $Ra = 2.615 \times 10^8$. Rouge : dynamique T_{C2}^2 pour $Ra = 2.59 \times 10^8$. (b) Spectre en puissance réalisé sur l'observable E_k à $Ra = 2.621 \times 10^8$ sur la dynamique T_{C3}^2 . (c) Dynamique $CS T_{C3}^1$, $Ra = 2.63 \times 10^8$. (d) Décroissance exponentielle de $s(t)$ jusqu'à atteindre la dynamique T_{C3}^1 à partir d'une condition initiale non- CS pour $Ra = 2.632 \times 10^8$. Le taux de déclin est estimé à $\lambda_\perp = -8.7 \times 10^{-4}$. ([Retour au texte](#))

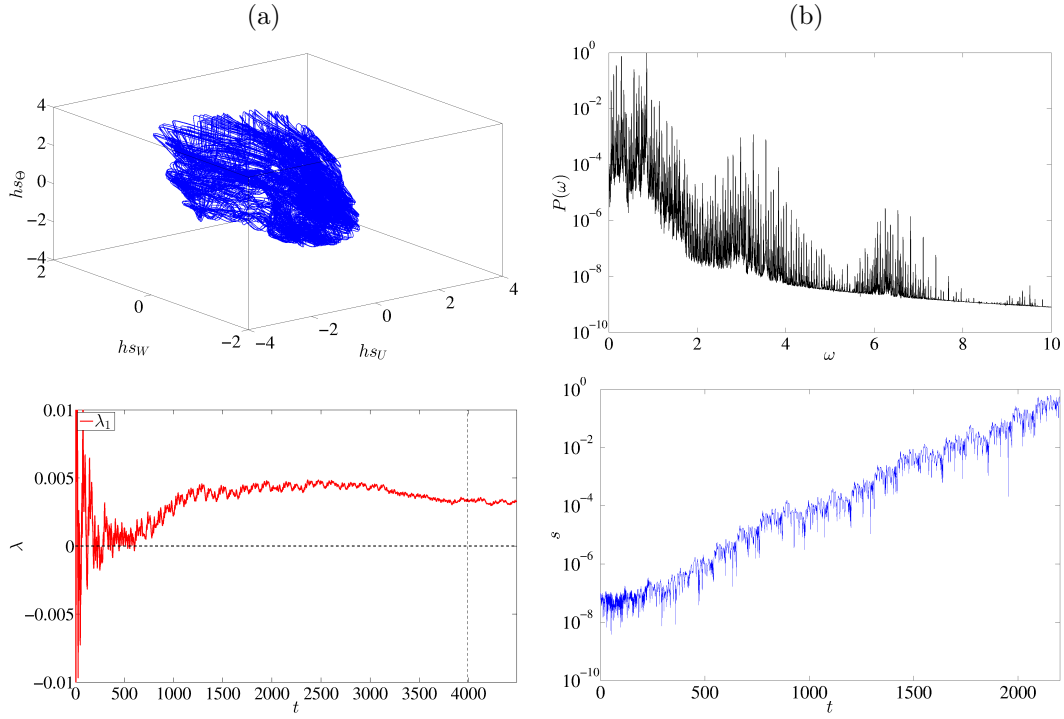


FIGURE 4.14 – Dynamique CS chaotique C_X pour $Ra = 2.65 \times 10^8$ (a) Portrait de phase. (b) Spectre en puissance réalisé sur l’observable E_k . (c) $\lambda_1 = f(t)$. Le plus grand exposant de Lyapunov, évalué sur la plage commencée par les pointillés noirs, est estimé à $\lambda_1 > 0$ à $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. (d) $s(t)$ sans symétrie imposée. Le taux de croissance à partir de l’espace CS est estimé à $\lambda_\perp = 7.56 \times 10^{-3}$. ([Retour au texte](#))

des basses fréquences du spectre en puissance augmente de même que leur énergie (Fig. 4.14b). Le plus grand exposant de Lyapunov est estimé à $\lambda_1 > 0$ (Fig. 4.14c). La dynamique obtenue serait donc chaotique (nommée C_X). La dynamique C_X est instable vis à vis des perturbations NCS (Fig. 4.14d).

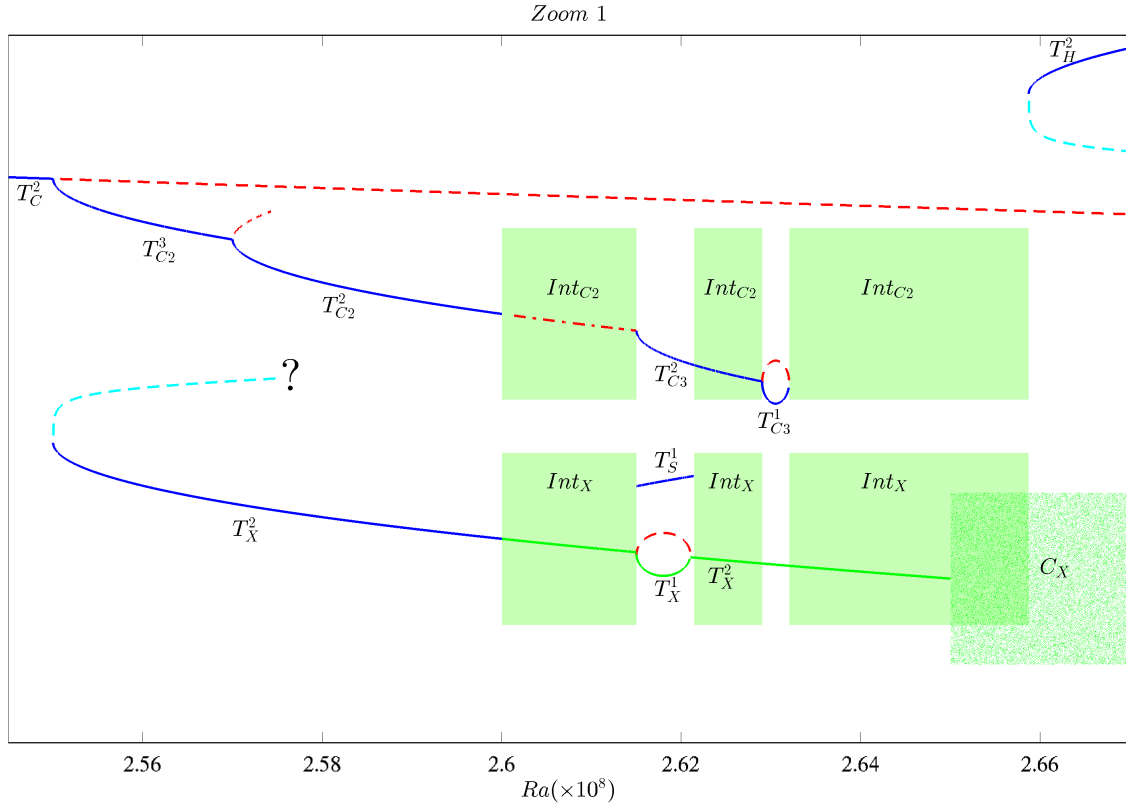


FIGURE 4.15 – Schéma des dynamiques proches du sous-espace CS pour $Ra \in [2.55, 2.67] \times 10^8$. Les dynamiques stables sont représentées en bleu, les dynamiques stables dans le sous-espace CS mais instables sans symétrie imposée sont représentées en vert. Les dynamiques instables supposées sont représentées en rouge. Les branches instables présumées reliant deux dynamiques hystérétiques sont représentées en bleu clair. Les régions d'intermittence sont signalées par les rectangles vert. La dynamique chaotique C_X est symbolisée par un nuage de points. Toute dynamique stable (courbe verte ou bleu foncé) orientée vers le haut correspond à une dynamique existant hors du sous-espace CS . Les courbes orientées vers le bas indiquent des dynamiques CS . ([Retour au texte](#))

4.3 Dynamiques proches du sous-espace centro-symétrique

Dans ce paragraphe, nous montrons l'existence d'au moins deux dynamiques intermittentes, nommées Int_X et Int_{C2} , réparties sur trois plages en Ra . Ces dynamiques n'appartiennent pas au sous-espace des solutions CS . Nous montrons de plus l'existence d'une dynamique NCS de nature périodique, nommée T_S^1 . Nous montrons que la fin de cette zone d'intermittence coïncide avec l'apparition d'une nouvelle dynamique quasi-périodique stable, nommée T_H^2 . Le diagramme de bifurcation schématisé sur la plage $Ra \in [2.55, 2.67] \times 10^8$ est présenté sur la figure 4.15.

Régimes intermittents Int_{C2} et Int_X : Pour $Ra \simeq 2.599 \times 10^8$, les dynamiques T_X^2 et T_{C2}^2 ne sont pas observées à symétrie non imposée. La nature de l'instabilité produite dépend du régime observé : T_{C2}^2 devient instable vis à vis de perturbations CS et NCS , T_X^2 vis à vis de perturbations NCS . Sous réserve d'une autre dynamique stable dans CS (non-observée jusqu'à présent), l'espace des solutions CS est donc devenu répulsif. La dynamique obtenue réalise alors des excursions plus ou moins importantes en dehors de l'espace CS , sous la forme de deux attracteurs possibles. Le portrait de phase du premier ressemble à ceux des dynamiques T_X^2 (voir Figs 4.16 a et b). Il possède la propriété S (Fig. 4.17a). Le second attracteur obtenu possède un portrait de phase ressemblant à celui des dynamiques T_{C2}^2 (voir Figs 4.16 c et d) et ne possède pas la propriété S (Fig. 4.17b). En raison de ces ressemblances, ces deux attracteurs ont été nommés Int_{C2} pour celui ressemblant à T_{C2}^2 et Int_X pour celui ressemblant à T_X^2 (voir Figs 4.16). Ces régimes ont été détectés sur trois

$Ra \in (\times 10^8)$	Dynamiques
$[2.6587, 2.666[$	T_H^2
$[2.666, 2.73[$	T_{H+}^2 et T_{H-}^2
$[2.73, 2.851[$	T_H^2
$[2.851, 2.90[$	T_{H+}^2 et T_{H-}^2
$[2.90, 2.95[$	T_H^2

 TABLE 4.1 – Plage des régimes T_H^2 . ([Retour au texte](#))

plages d'existence : $Ra \in [2.599, 2.616] \times 10^8$, $[2.6214, 2.628] \times 10^8$ et $[2.632, 2.665] \times 10^8$. Chacune de ces phases intermittentes est entrecoupée par l'existence d'une plage sur laquelle une dynamique stable existe. La première d'entre elle correspond à la synchronisation T_X^1 , couplée à l'apparition du régime T_S^1 décrit ci-après, la seconde à l'apparition de la dynamique T_{C3}^1 . La fin de ces plages d'intermittence marque l'apparition des régimes T_H^2 .

Cycles limites T_S^1 : La fenêtre de périodicité T_S^1 existe pour $Ra \in [2.616, 2.6213] \times 10^8$, et conduit à l'apparition d'un régime de pulsation $\omega_e^S \approx \omega_e^X/2$. L'attracteur obtenu possède la propriété S (Fig. 4.18) dont le portrait de phase en (E_k, E_Θ) ressemble fortement à la dynamique T_X^1 mais dédoublée (Fig. 4.18b). Cette dynamique est stable et attractive.

Tores T_H^2 : À partir de $Ra \simeq 2.6587 \times 10^8$ les régimes intermittents Int_X et Int_{C2} ne sont plus observés. Les exposants de Lyapunov (Fig. 4.20f) calculés sur l'attracteur obtenu sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ et suggèrent une nouvelle dynamique toroïdale T^2 . Au point de bifurcation, cette dynamique, nommée T_H^2 , possède la propriété S (voir Fig. 4.20a). Pour $Ra \approx 2.666 \times 10^8$, T_H^2 subit une bifurcation fourche donnant naissance à 2 dynamiques toroïdales T_{H+}^2 et T_{H-}^2 symétriques l'une de l'autre. Pour $Ra \approx 2.73 \times 10^8$, ces deux dynamiques symétriques fusionnent en reformant l'attracteur T_H^2 . Le même scénario de bifurcation se produit à nouveau pour $Ra \in [2.851, 2.9] \times 10^8$, plage sur laquelle existent deux nouvelles dynamiques T_{H+}^2 et T_{H-}^2 . Ces différentes dynamiques observées ainsi que leur plage d'apparition sont donnés en table 4.1 et les dynamiques associées illustrées en Fig. 4.20 (a-e). Ces tores possèdent une pulsation porteuse $\omega_e^{T_H^2} \simeq \omega_e^{T_C^2}/2 \simeq 0.1427$, variant très peu avec Ra . La similitude des portraits de phase en énergie et la valeur de la pulsation ω_e laissent à penser que ces régimes apparaissent via une re-stabilisation de la branche T_C^2 devenue instable pour $Ra \simeq 2.55 \times 10^8$ (voir Figs. 4.21).

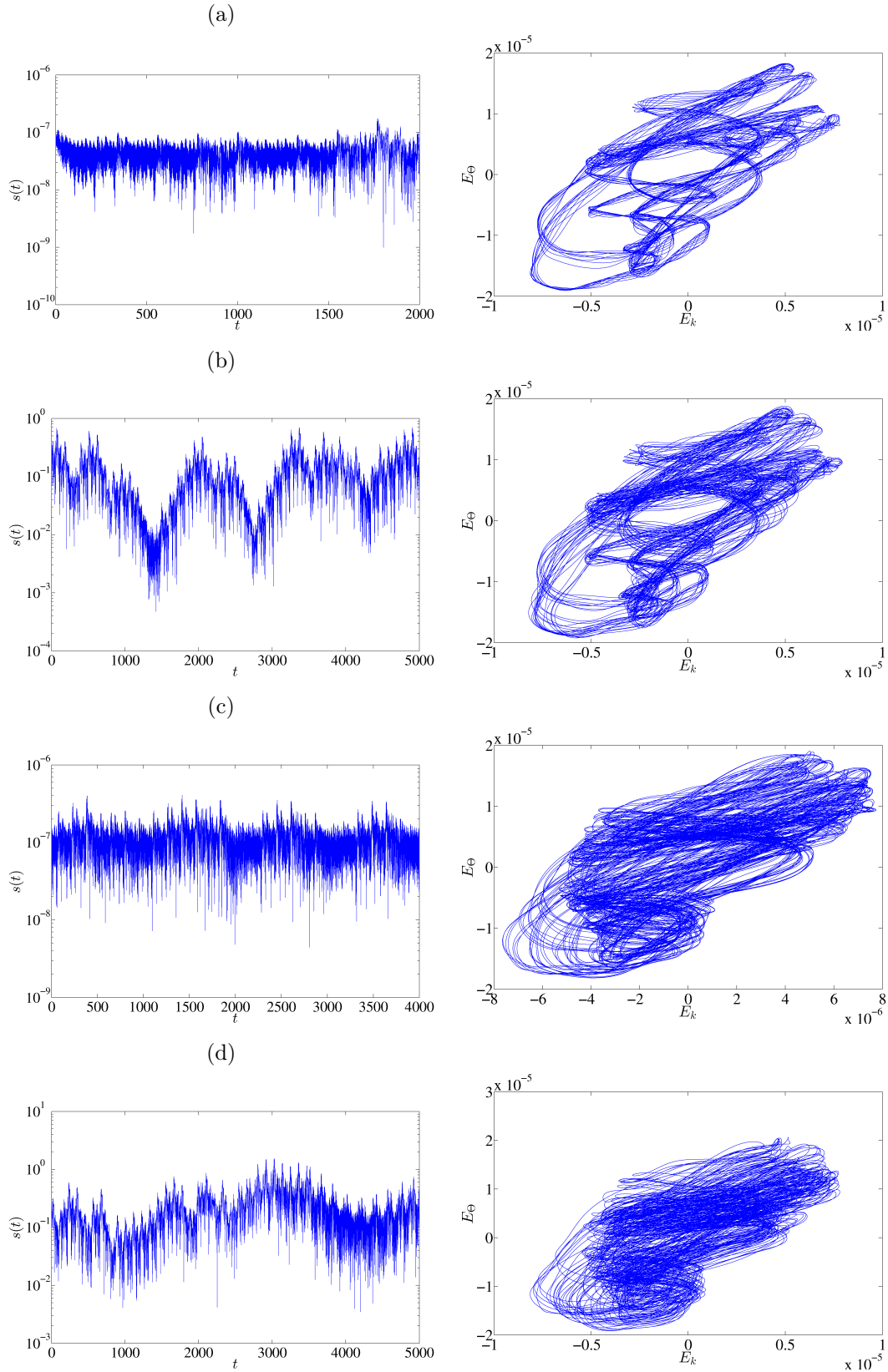


FIGURE 4.16 – Gauche : signal $s(t)$. Droite : portrait de phase (E_k, E_θ) . (a) Dynamique T_X^2 , $Ra = 2.59 \times 10^8$. (b) Intermittence Int_X , $Ra = 2.5996 \times 10^8$. (c) Dynamique T_{C2}^2 , $Ra = 2.597 \times 10^8$. (d) Intermittence Int_{C2} , $Ra = 2.5994 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

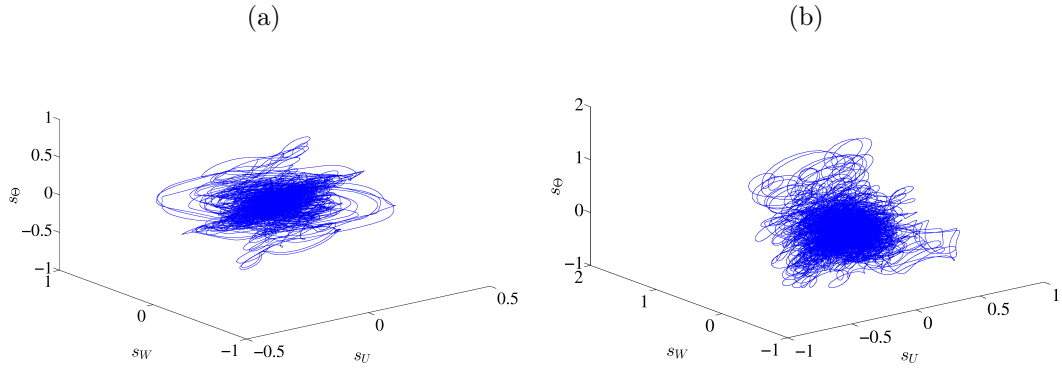


FIGURE 4.17 – Portraits de phase (s_U, s_W, s_Θ) des régimes intermittents : (a) Int_X , $Ra = 2.5996 \times 10^8$ (symétrique S). (b) Int_{C2} , $Ra = 2.5994 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

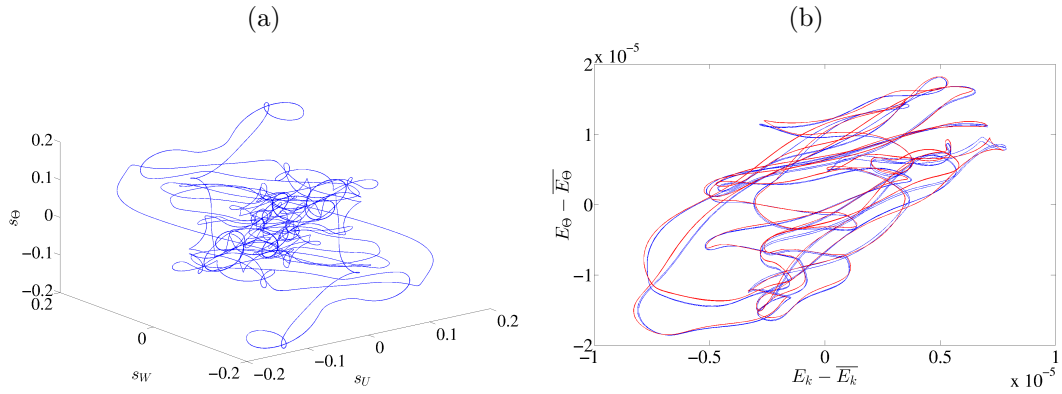


FIGURE 4.18 – $Ra = 2.616 \times 10^8$. (a) Portait de phase T_S^1 en (s_U, s_W, s_Θ) . (b) Comparaison des portraits de phase en (E_k, E_Θ) pour T_X^1 (rouge) et T_S^1 (bleu). ([Retour au texte](#))

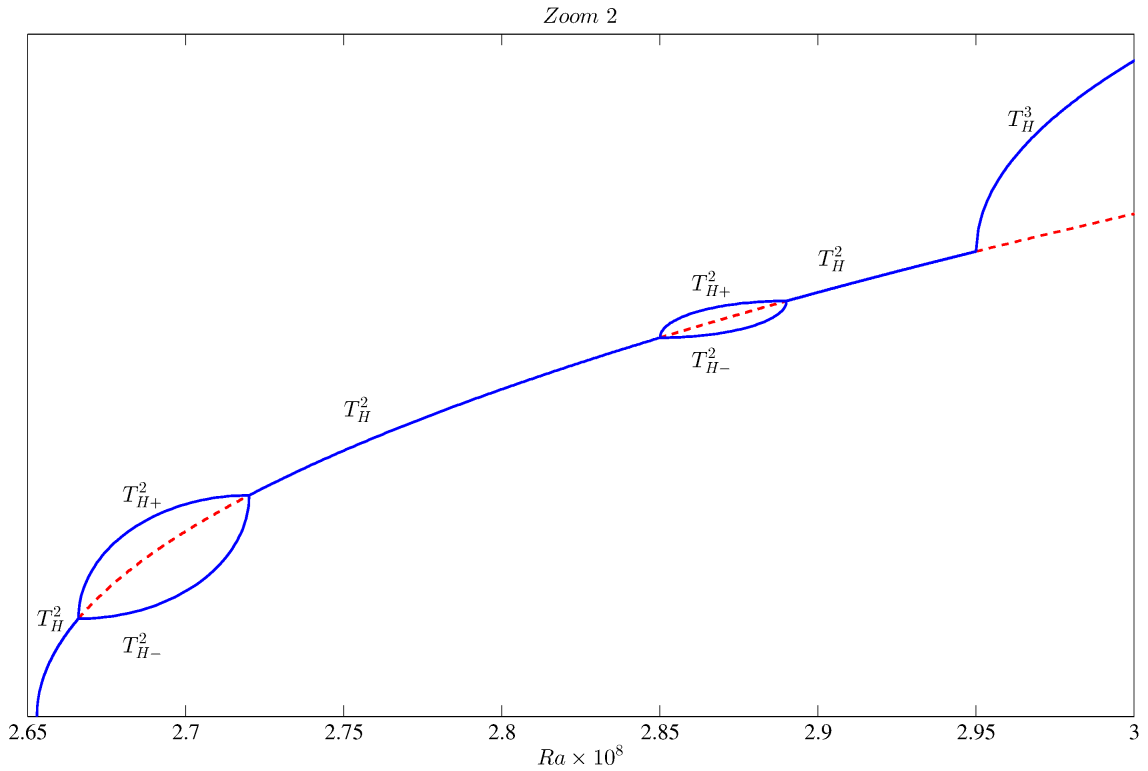


FIGURE 4.19 – Schéma de bifurcation des régimes T_H^2 . ([Retour au texte](#))

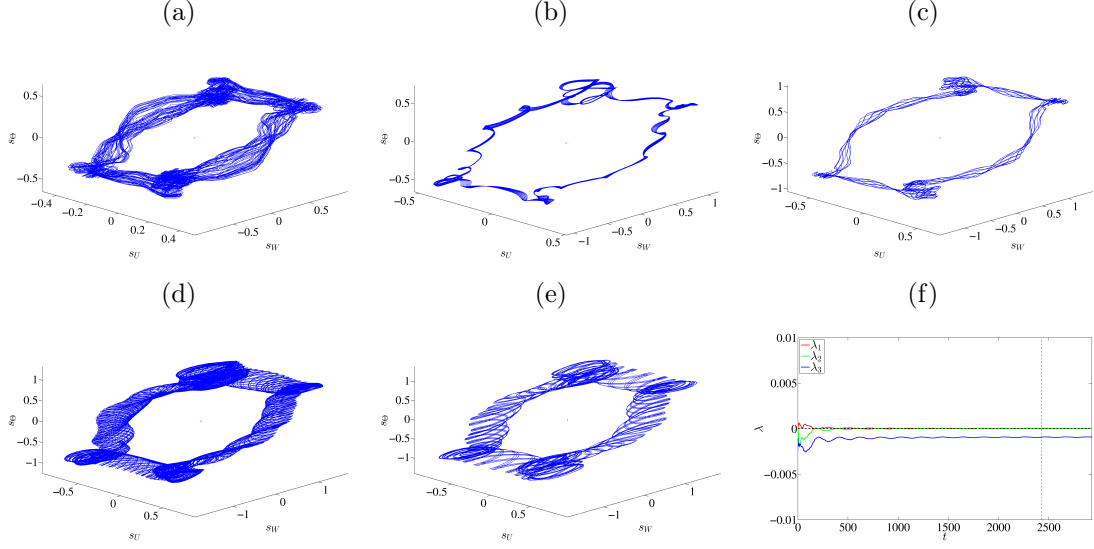


FIGURE 4.20 – Régimes T_H^2 : (a) T_H^2 , (b) T_{H+}^2 , (c) T_H^2 , (d) T_{H+}^2 , (e) T_H^2 . $Ra(\times 10^8)$ (a) 2.66, (b) 2.70, (c) 2.80, (d) 2.87, (e) 2.905, (f) $\lambda_i = f(t), i = 1, 2, 3$ pour $Ra = 2.855 \times 10^8$ et $\tau_\lambda = 44$. Les exposants de Lyapunov, évalués sur la plage commencée par les pointillés noirs, sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$. ([Retour au texte](#))

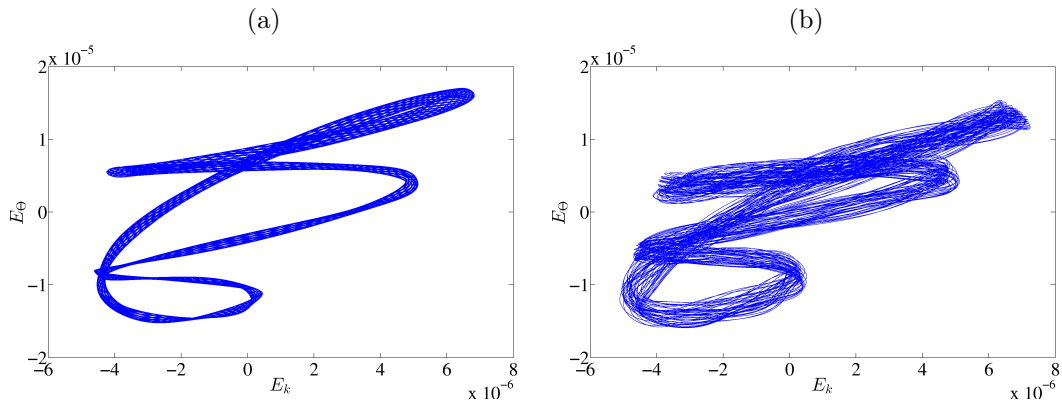


FIGURE 4.21 – Portraits de phase en (E_k, E_Θ) . (a) Dynamique T_C^2 pour $Ra = 2.5 \times 10^8$. (b) Dynamique T_H^2 pour $Ra = 2.6587 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

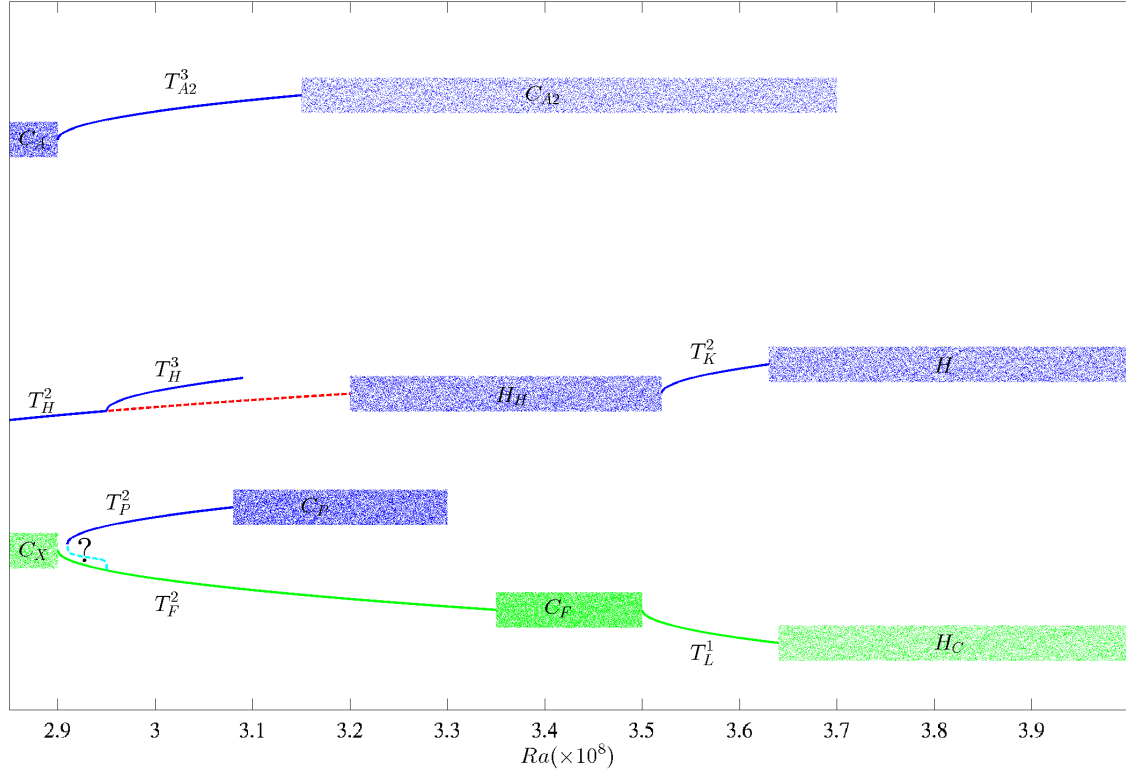


FIGURE 4.22 – Schéma des régimes *NCS* $T_H^3, T_{A2}^3, C_{A2}, T_P^2, T_P^3, H_H, T_K^2, H$ et *CS* T_F^2, C_F, T_L^1 et H_C . Les dynamiques *NCS* non-chaotiques T_{A2}^3, T_H^3, T_P^2 et T_P^3 sont présentées au §4.4.1, les dynamiques chaotiques C_{A2} et H_H au §4.4.2. Les dynamiques *CS* T_F^2 et C_F sont décrites au §4.4.3. Le cas des dynamiques T_L^1 et T_K^2 est montré au §4.4.4. Les hyperchaos H et H_C sont présentés au §4.4.5. Les dynamiques stables sont identifiées sur ce schéma en bleu. Les dynamiques stables dans *CS* mais instables vis à vis de perturbations *NCS* en vert. Les dynamiques instables supposées sont représentées en pointillés rouges. Les nuages de points symbolisent les dynamiques chaotiques. Les courbes orientées vers le bas indiquent des dynamiques *CS*. Les courbes orientées vers le haut indiquent des dynamiques *NCS*. ([Retour au texte](#))

4.4 Au delà de $Ra = 2.9 \times 10^8$

Avant $Ra \approx 2.9 \times 10^8$, nous avons montré l'existence des dynamiques *NCS* C_A, T_H^2 et du chaos C_X évoluant sur le sous-espace *CS*. Ces trois dynamiques bifurquent toutes vers $Ra \approx 2.9 \times 10^8$ en devenant T_H^3, T_{A2}^3 et T_P^2 et T_F^2 respectivement. Nous n'avons, à ce jour, aucune explication quant aux raisons physiques produisant ces bifurcations sur l'ensemble du système. Peut être sont-elles liées à un rapport entre fréquences devenu favorable à cet accrochage global.

Ce paragraphe se découpe en quatre parties. La première (§4.4.1) traite les dynamiques *NCS* stables T_H^3, T_{A2}^3, T_P^2 et T_P^3 . Le §4.4.2 présente les dynamiques chaotiques C_{A2} , issue de T_{A2}^3 et H_H que nous supposons issue de T_H^2 instable. Au §4.4.3 nous présentons la dynamique T_F^2 , issue de C_X , ainsi que le chaos C_F .

Le §4.4.4 décrit l'existence d'une fenêtre de périodicité contenant les dynamiques T_K^1 et T_L^1 . Cette fenêtre existe dans l'espace des solutions *NCS* et *CS*, respectivement. Le §4.4.5 montre l'identification de deux attracteurs hyper-chaotiques H pour l'espace des dynamiques *NCS* et H_C pour les dynamiques du sous-espace *CS*.

L'ensemble des bifurcations et dynamiques identifiées sur $Ra \in [2.9, 4.0] \times 10^8$ sont représentées sous la forme d'un diagramme de bifurcations schématisé présenté sur la figure 4.22.

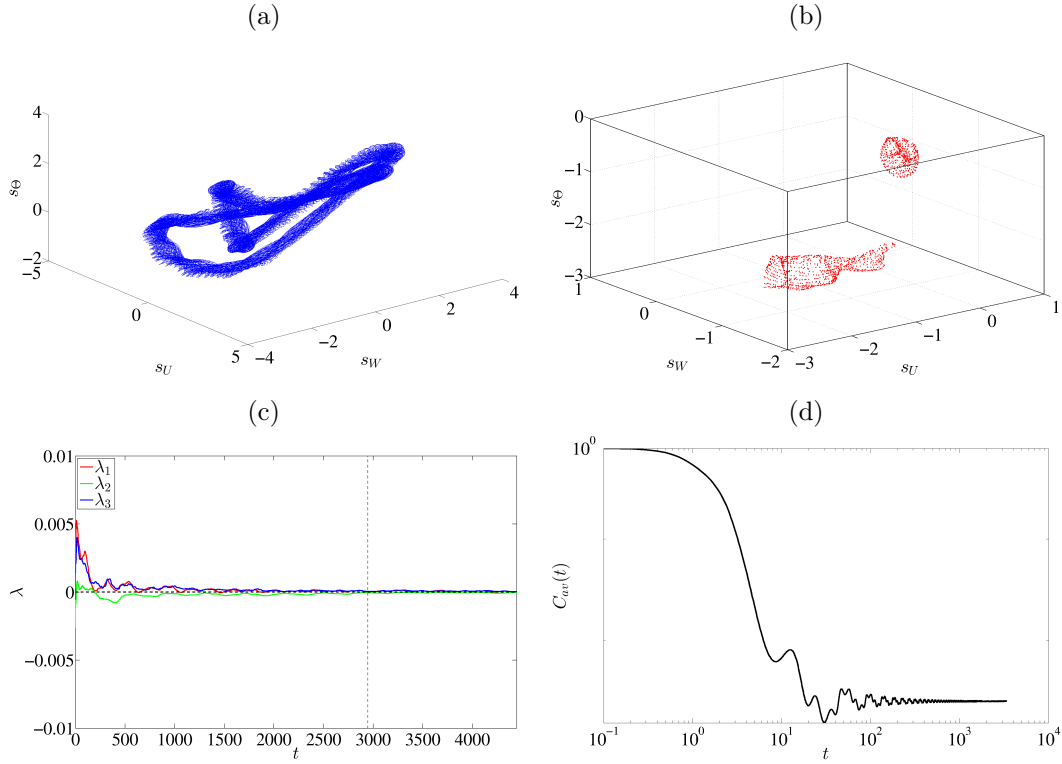


FIGURE 4.23 – Dynamique T_{A2}^3 pour $Ra = 3.05 \times 10^8$. (a) Portrait de phase. (b) Section de Poincaré prise en $hs_W = 0, dhs_W/dt > 0$. (c) $\lambda_i = f(t); i = 1, 2, 3$ pour $\tau_\lambda = 44$. Les exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$. (d) $C_{av}(\tau)$ calculé à partir de l'observable $s(t)$. ([Retour au texte](#))

4.4.1 Dynamiques non centro-symétriques quasipériodiques

Tores T_{A2}^3 : Le chaos issu de T_A^3 disparaît pour $Ra \in [2.895, 2.905] \times 10^8$ au profit d'un nouveau régime toroïdal semblable à T_A^3 (Fig. 4.23a) et caractérisé par $\omega_e^{T_{A2}^3} \approx \omega_e^{T_A^3}/2 \simeq 0.1436$. Une section de Poincaré réalisée sur le portrait de phase de cette dynamique (Fig. 4.23a) révèle la présence de surfaces de points, à l'image de celles trouvées pour les régimes T_A^3 . Les trois premiers exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ (Fig. 4.23c). La fonction $C_{av}(\tau)$ atteint une valeur asymptotique (Fig. 4.23d), et traduit un régime quasi-périodique. La dynamique, nommée T_{A2}^3 , est une nouvelle dynamique T^3 provenant de la re-stabilisation de la branche solution T_A^3 dédoublée. Cette dynamique possède une très basse pulsation $\omega_{T_{BF}}^{T_{A2}^3} \approx 0.012$.

Tores T_H^3 : $Ra = 2.95 \times 10^8$ marque la fin du régime T_H^2 . La nouvelle dynamique observée se révèle plus complexe (voir Fig. 4.24a) et ne présente plus la propriété S . La pulsation enveloppe détectée vaut $\omega_e^{T_H^3} \approx \omega_e^{T_H^2} \approx 0.1424$. Une section de Poincaré prise en $hs_W = 0$ révèle la présence de surfaces de points (Fig. 4.24b). Les trois premiers exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ (Fig. 4.24c). L'indicateur $C_{av}(\tau)$ atteint une valeur asymptotique constante (4.24d) au-delà de $\tau \simeq 10^2$. L'ensemble des indicateurs suggèrent une dynamique quasi-périodique à trois fréquences. Cette dynamique, nommée T_H^3 , possède une très basse pulsation $\omega_{T_{BF}}^{T_H^3} \approx 0.005$ conduisant à $\omega_e^{T_H^3}/\omega_{T_{BF}}^{T_H^3} \approx 28$. Cette dynamique a pu être suivie jusqu'à $Ra = 3.08 \times 10^8$. Au delà de cette valeur, T_H^3 n'a pas été détecté et la dynamique converge invariablement vers le régime T_{A2}^3 .

Tores T_P^2 : À partir de $Ra = 2.91 \times 10^8$, une nouvelle dynamique toroïdale NCS a été identifiée. Cette dynamique, nommée T_P^2 , possède des portraits de phase en énergie très similaires à ceux obtenus pour les tores T_P^2 décrits au §4.4.3 (voir Fig. 4.25(a) et (b)). Cette ressemblance entre les

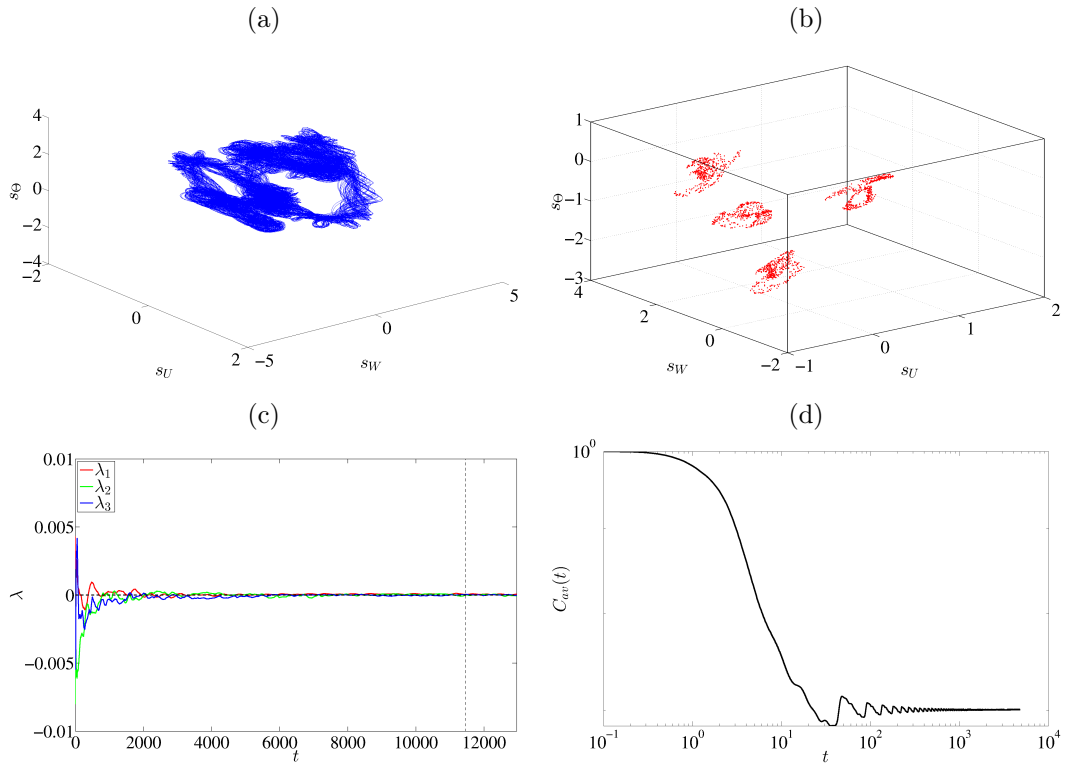


FIGURE 4.24 – Dynamique T_H^3 pour $Ra = 3.08 \times 10^8$. (a) Portrait de phase en (s_U, s_W, s_Θ) . (b) Section de Poincaré en $hs_W = 0, dhs_W/dt > 0$. (c) $\lambda_i = f(t), i = 1, 2, 3$ pour $\tau_\lambda = 44$. Les exposants de Lyapunov sont respectivement estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$. (d) $C_{av}(\tau)$ calculé à partir de l'observable $s(t)$. ([Retour au texte](#))

portraits de phase suggère que la dynamique T_P^2 provient de la dynamique T_F^2 . T_F^2 a été observée dès $Ra = 2.90 \times 10^8$. T_P^2 devrait donc être issue de T_F^2 par une bifurcation sous-critique, à l'image de celle suggérée entre T_H^2 et T_C^2 instable (voir §4.3).

La dynamique T_P^2 possède une pulsation $\omega_e^{T_P^2} \approx 0.07 \approx \omega_e^{T_F^2}$ et est symétrique S . Pour $Ra > 3.0 \times 10^8$, nous avons décelé l'existence d'une très basse pulsation ω_{TBF} (voir figs 4.25e et f) qui diminue jusqu'à $Ra \approx 3.05 \times 10^8$ puis en augmente au delà (fig. 4.25d). La pulsation ω_e reste sensiblement la même sur la plage où existe T_P^2 . Les rapports entre ces deux pulsations sont présentés sur la figure 4.25d. La dynamique T_P^2 est suivie jusqu'à $Ra = 3.07 \times 10^8$. Pour $Ra = 3.08 \times 10^8$, la solution observée décrit le régime quasi-périodique T_P^3 décrit ci-après.

Tores T_P^3 Pour $3.07 \times 10^8 < Ra \leq 3.08 \times 10^8$, la dynamique T_P^2 bifurque vers une dynamique dont le portrait de phase en énergie possède la même structure que T_P^2 (voir fig. 4.26a). Cette dynamique est non symétrique S (voir fig. 4.26b). Une section de Poincaré prise en $hs_U = 0, dhs_U/dt > 0$ représente une surface de points sans structure particulière (voir Fig. 4.26c). Le plus grand exposant de Lyapunov est évalué à $\lambda_1 = 0$. Ces indicateurs suggèrent que cette dynamique, nommée T_P^3 , est quasi-périodique à trois fréquences. T_P^3 a été observé jusqu'à $Ra = 3.24 \times 10^8$. Passée cette valeur de Ra , une solution démarrant dans le voisinage de T_P^3 peut soit converger vers la dynamique chaotique C_{A2} ou la dynamique chaotique H_H (voir §4.4.2).

4.4.2 Dynamiques chaotiques non centro-symétriques

Chaos C_{A2} À partir de $Ra \simeq 3.15 \times 10^8$, la dynamique structurée autour des tores T_{A2}^3 se brouille (Fig. 4.27a). Le plus grand exposant de Lyapunov est estimé à $\lambda_1 > 0$ (Fig. 4.27b) et traduit une dynamique chaotique. Ce chaos, nommé C_{A2} a pu être suivi jusqu'à $Ra \simeq 3.30 \times 10^8$, valeur à partir de laquelle la dynamique converge vers l'attracteur hyper-chaotique H_H décrit ci-après.

Hyperchaos H_H Pour $Ra \approx 3.09 \times 10^8$, une autre branche solution a pu être identifiée. Cette solution, illustrée sur la figure 4.28a montre un portrait de phase rappelant les tores T_H^2 . Les trois premiers exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, 0)$. Ils traduisent le caractère hyperchaotique (plus d'un exposant de Lyapunov positif) de la dynamique observée (Fig. 4.28b). Cette dynamique, nommée H_H en référence à son origine supposée, est symétrique S .

4.4.3 Dynamiques centro-symétriques

Tores T_F^2 : Pour $Ra \approx 2.93 \times 10^8$, le chaos C_X disparaît au profit de l'apparition d'une nouvelle dynamique T^2 (voir Fig. 4.29). La pulsation enveloppe détectée vaut $\omega_e^{T_F^2} \approx \omega_e^{T_C^1}/2 \approx 0.071$ (voir Fig. 4.29b). La représentation du mode en température filtré autour de cette pulsation est donnée sur la figure 4.30. Cette dynamique, nommée T_F^2 , est instable vis à vis de perturbations NCS (voir Fig. 4.29c) et présente un accrochage en fréquence autour de $Ra \approx 3.35 \times 10^8$ (voir Fig. 4.29d).

Chaos C_F : À partir de $Ra = 3.40 \times 10^8$, nous avons détecté la présence d'une dynamique ressemblant aux tores T_F^2 (Fig. 4.31a) mais dont le spectre en pulsation montre un bruit de fond élevé (Fig. 4.31b). L'évaluation du premier exposant de Lyapunov donne $\lambda_1 > 0$ (Fig. 4.31c et d), traduisant le passage à une dynamique chaotique. Cette dynamique, nommée C_F , est détectée jusqu'à $Ra \approx 3.50 \times 10^8$.

4.4.4 Fenêtres de périodicité

Cycles limites $CS T_L^1$: À partir de $Ra = 3.50 \times 10^8$, le chaos C_F laisse place à une dynamique autour d'un cycle limite, nommé T_L^1 (Fig. 4.32a). La pulsation à laquelle oscille T_L^1 vaut $\omega_e^{T_L^1} \approx 0.0238$ jusqu'à $Ra = 3.51 \times 10^8$, valeur de Ra à partir de laquelle $\omega_e^{T_L^1} \approx 0.0476$. Cette nouvelle pulsation suggère que T_L^1 subit un doublement de pulsation (ou instabilité subharmonique) autour

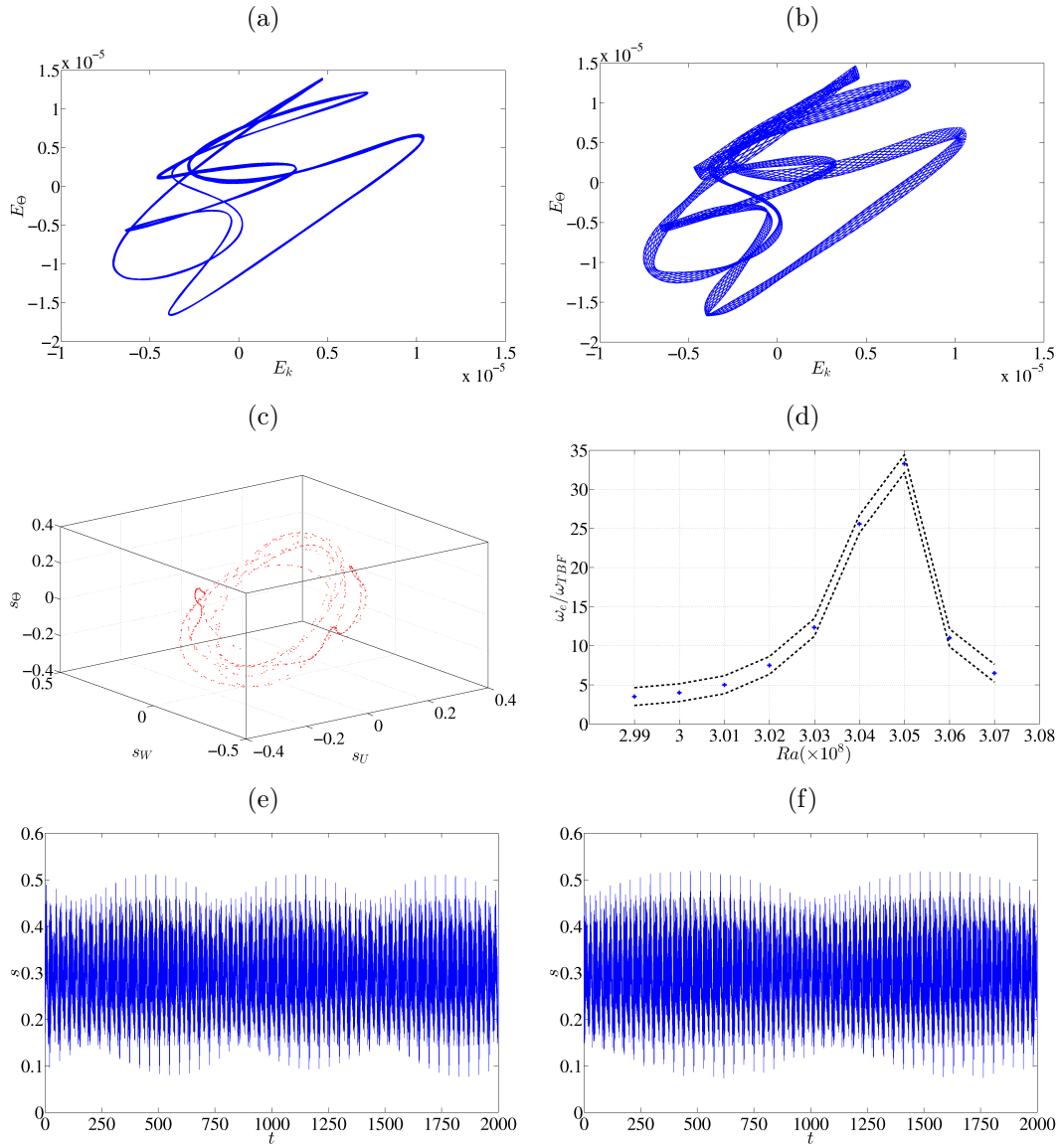


FIGURE 4.25 – Dynamique T_P^2 , $Ra = 2.93 \times 10^8$. (a-b) Portraits de phase en énergie pour d’une dynamique (a) T_P^2 et (b) T_F^2 . (c) Section de Poincaré sur T_P^2 en $hs_U = 0$. (d) Variation du rapport entre la pulsation $\omega_e^{T_P^2} \approx 0.07$ et ω_{TBF} . (e-f) $s(t)$ pour (e) $Ra = 3.02 \times 10^8$ et (f) $Ra = 3.03 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

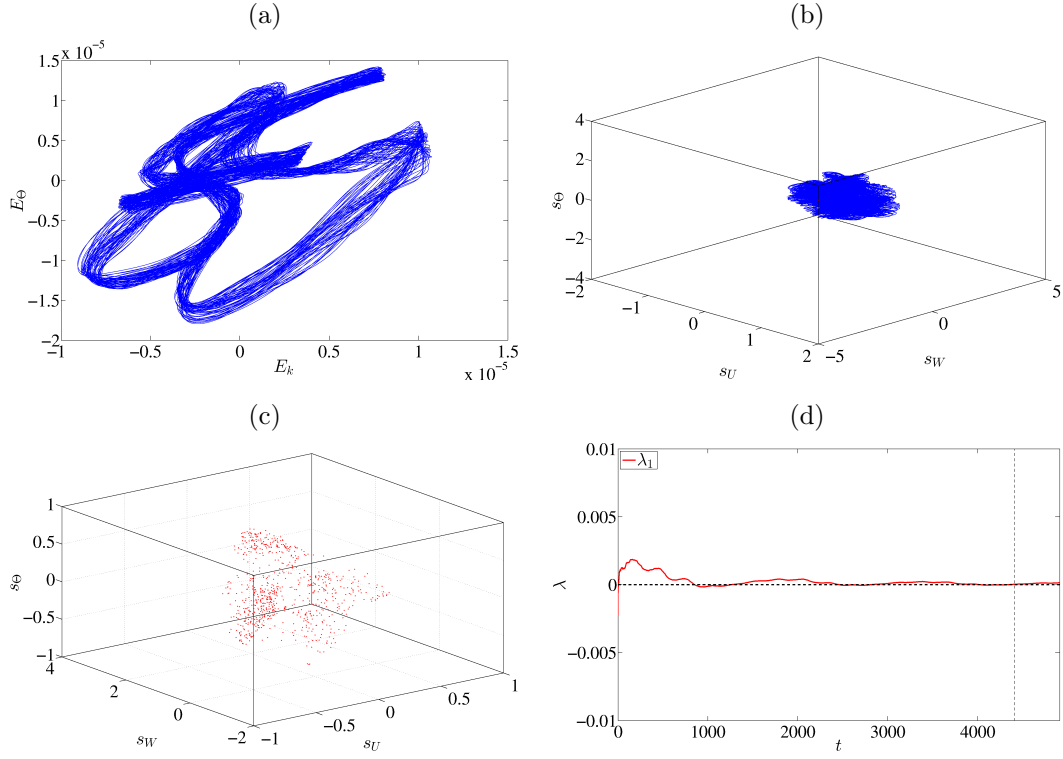


FIGURE 4.26 – Dynamique quasi-périodique T_P^3 pour $Ra = 3.15 \times 10^8$. (a-b). Portraits de phase. (c). Section de Poincaré en $hs_U = 0, dhs_U/dt > 0$. (d). $\lambda_1 = f(t)$ à $Ra = 3.20 \times 10^8$. λ_1 est estimé à $\lambda_1 = 0$ à partir des pointillés noirs pour $\tau_\lambda = 88$. ([Retour au texte](#))

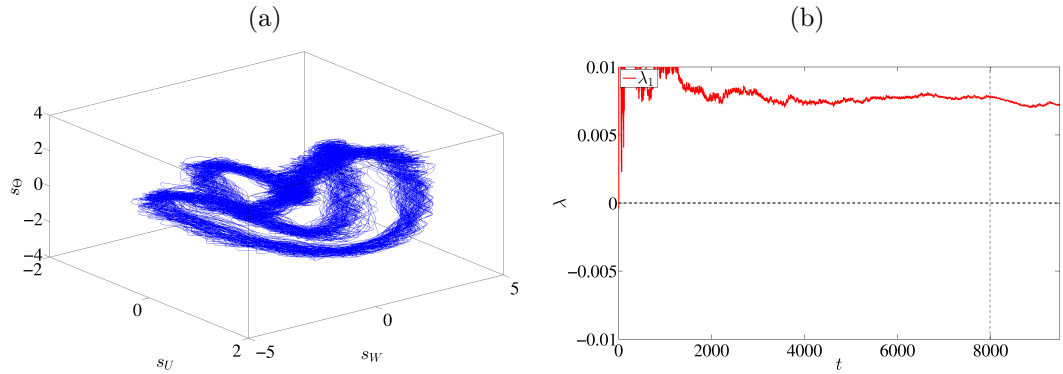


FIGURE 4.27 – Dynamique chaotique C_{A2} à $Ra = 3.16 \times 10^8$. (a) Portrait de phase. (b) $\lambda_1 = f(t)$. Le premier exposant de Lypaunov est estimé à $\lambda_1 > 0$ avec $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. ([Retour au texte](#))

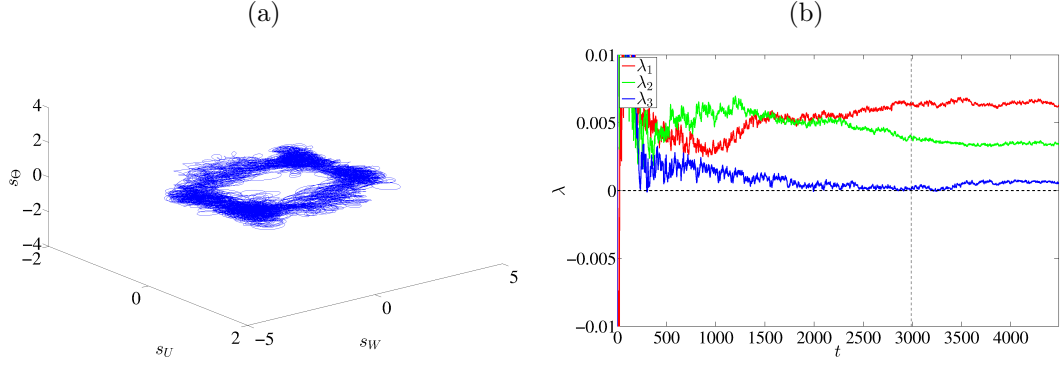


FIGURE 4.28 – Dynamique hyperchaotique H_H à $Ra = 3.35 \times 10^8$. (a). Portrait de phase. (b). $\lambda_i = f(t), i = 1, 2, 3$. Les trois premiers exposants de Lyapunov sont estimés respectivement à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, 0)$ pour $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. ([Retour au texte](#))

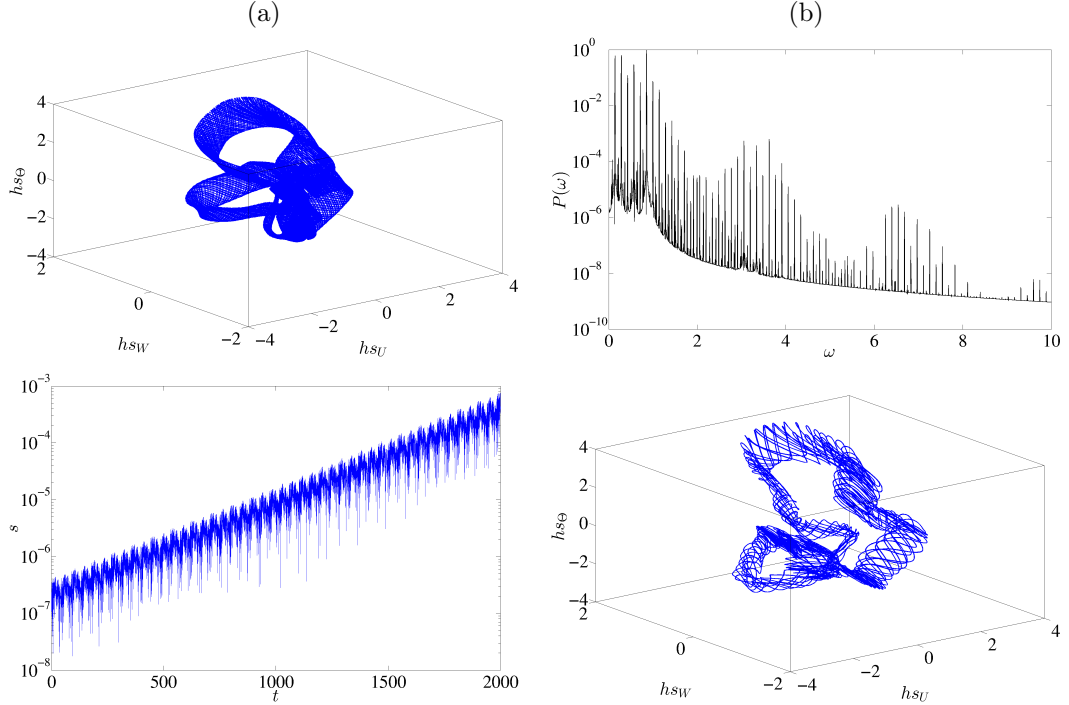


FIGURE 4.29 – Dynamique T_F^2 pour $Ra = 2.99 \times 10^8$ (a) Portrait de phase. (b) Spectre de puissance évalué à partir de l'énergie cinétique E_k . (c) Indicateur de symétrie $s(t)$ à symétrie non imposée pour $Ra = 2.65 \times 10^8$. Le taux de croissance à partir de l'espace CS est estimé à $\lambda_\perp \simeq 3.77 \times 10^{-3}$. (d) Accrochage en fréquence du tore T_F^2 à $Ra = 3.35 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

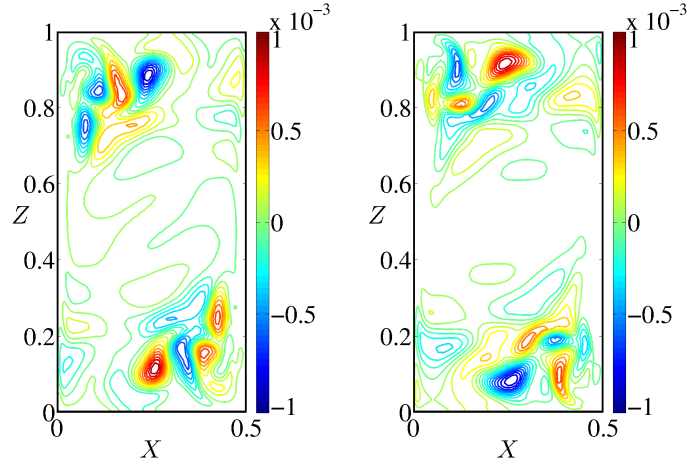


FIGURE 4.30 – Champ de température du mode de Fourier associé à la pulsation $\omega_e \approx 0.071$ du régime T_F^2 à $Ra = 2.99 \times 10^8$. Gauche : partie réelle (temps $t = 0[2\pi]$), droite : partie imaginaire (temps $t = -\pi/(2\omega_e)[2\pi]$). ([Retour au texte](#))

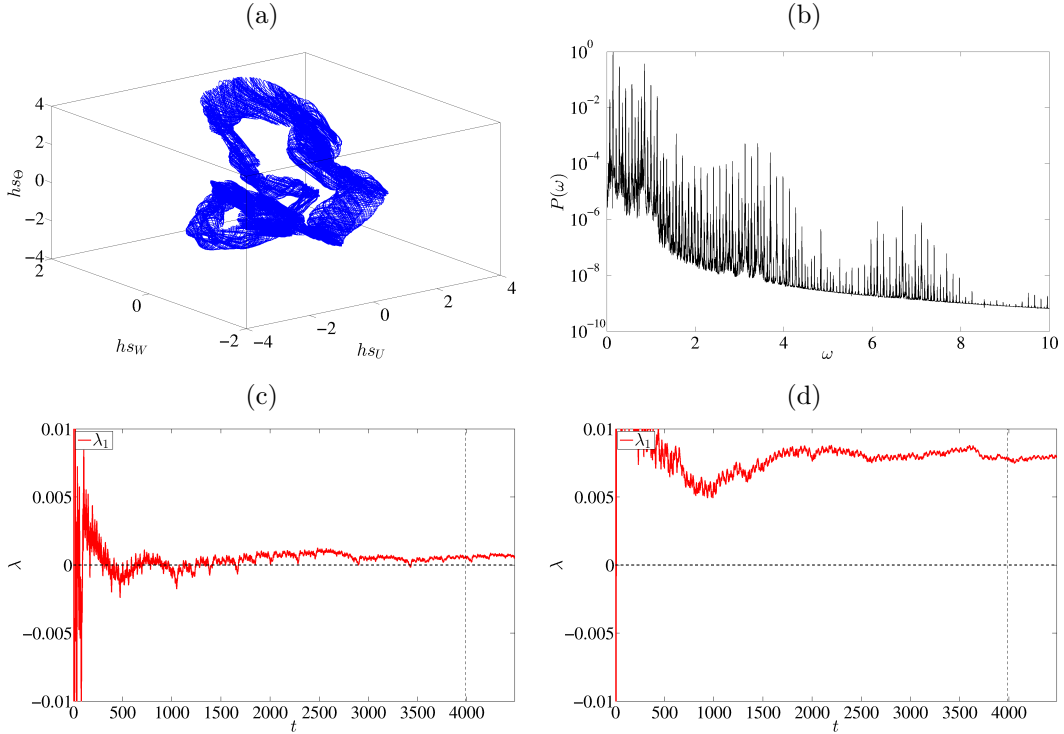


FIGURE 4.31 – Attracteur chaotique C_F pour $Ra = 3.40 \times 10^8$: (a) portrait de phase, (b) Spectre de puissance évalué à partir de l'énergie cinétique E_k . (c) $\lambda_1 = f(t)$ pour $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. Le plus grand exposant de Lyapunov est évalué à $\lambda_1 > 0$. (d) $\lambda_1 = f(t)$ à $Ra = 3.48 \times 10^8$, $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. Le plus grand exposant de Lyapunov est évalué à $\lambda_1 > 0$. ([Retour au texte](#))

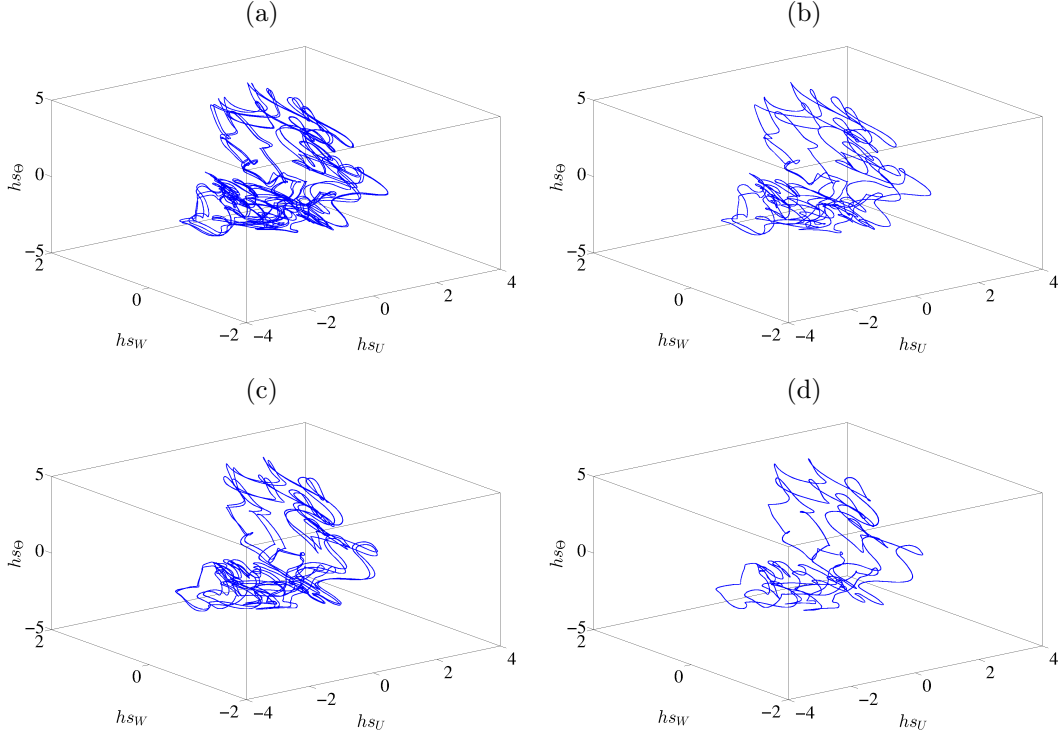


FIGURE 4.32 – Portrait de phase des dynamiques T_L^1 (a) $Ra = 3.50 \times 10^8$ (b) $Ra = 3.51 \times 10^8$ (c) $Ra = 3.60 \times 10^8$ (d) $Ra = 3.61 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

de cette valeur de Ra . Le nouveau cycle limite obtenu est illustré sur la figure 4.29b, et peut être suivi jusqu'à $Ra \approx 3.54 \times 10^8$. Pour cette valeur de Ra , le calcul du plus grand exposant de Lyapunov donne $\lambda_1 > 0$ (Fig. 4.33a) et traduit le passage à une dynamique chaotique, nommée C_L .

Le chaos C_L a été détecté pour $Ra = 3.54 \times 10^8$ et $Ra = 3.55 \times 10^8$. Nous supposons que la dynamique est chaotique sur $Ra \in [3.54, 3.55] \times 10^8$. Au delà de $Ra = 3.55 \times 10^8$, une nouvelle dynamique périodique apparaît. Cette dynamique, nommée T_{L2}^1 , se comporte de la même façon que la dynamique T_{L1}^1 et montre elle aussi des doubléments de période orientés suivant Ra décroissant (voir Figs. 4.32c et d pour une représentation des cycles limites T_{L2}^1). La dynamique T_{L2}^1 a pu être suivie jusqu'à $Ra \approx 3.64 \times 10^8$, où apparaît une nouvelle dynamique pour laquelle le plus grand exposant de Lyapunov est estimé à $\lambda_1 > 0$ (voir Fig. 4.33b). Ce chaos, nommé H_C est décrit en section 4.4.5.

La figure 4.34(haut) récapitule les différentes pulsations et dynamiques T_L^1 observées. Un schéma des dynamiques T_L^1 est proposé sur la figure 4.34(bas).

Dynamique NCS T_K^1 : Pour $Ra \approx 3.54 \times 10^8$, l'hyperchaos H_H se résorbe sur une dynamique dont le portrait de phase rappelle un régime toroïdal (voir Fig. 4.35a). Les points croisant la section de Poincaré $h_{sU} = 0$ semblent dessiner des structures à mi-chemin entre lignes et surfaces (Fig. 4.35b). La distribution spectrale associée à l'énergie cinétique du signal montre un spectre fréquentiel très dense (Fig. 4.35c). Les trois plus grands exposants de Lyapunov sont estimés à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ (4.35d). Au vu des indicateurs présents, trois cas sont possibles :

1. Le régime obtenu est T^3 . En ce cas, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la section de Poincaré doit représenter des surfaces de points.
2. Le régime obtenu est T^2 . En ce cas $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$ et la section de Poincaré doit représenter une ou plusieurs courbes.

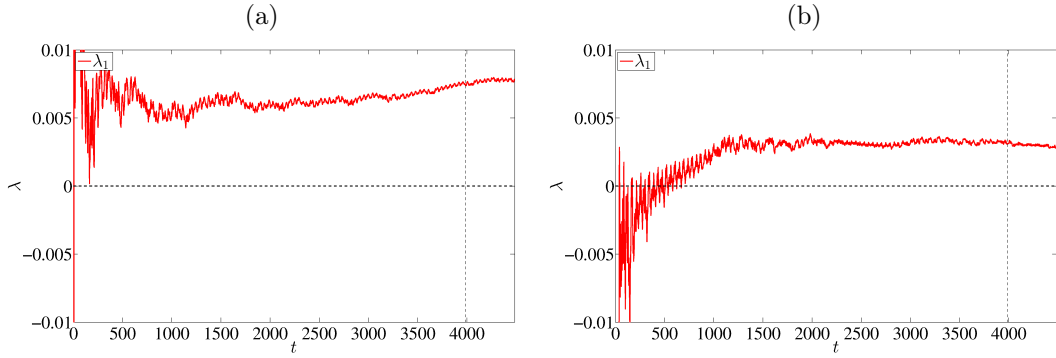


FIGURE 4.33 – Estimation du plus grand exposant de Lyapunov à $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$ pour (a) Une dynamique C_L à $Ra = 3.54 \times 10^8$, $\lambda_1 > 0$ (b) Une dynamique H_C à $Ra = 3.65 \times 10^8$, $\lambda_1 > 0$. ([Retour au texte](#))

3. Le régime obtenu est plus complexe, voir de type *SNA* (pour *Strange Non-chaotic Attractor* [24]), auquel cas, $\lambda_1 = 0, \lambda_3 < \lambda_2 < 0$ (comme pour une dynamique périodique) et la section de Poincaré doit rendre compte du caractère fractal de l'attracteur en dessinant des courbes plus ou moins lisses.

Les valeurs des exposants de Lyapunov traduisent plutôt un caractère proche du *SNA*, au même titre que la section de Poincaré (voir fig. 4.35). Toutefois, en l'absence de plus d'indicateurs nous laissons la question ouverte sur la nature de cette dynamique particulière, dans le doute nommée T_K^1 (d'après la valeur des exposants de Lyapunov). Cette dynamique a pu être observée jusqu'à $Ra \simeq 3.64 \times 10^8$. La pulsation ω_e associée vaut $\omega_e^{T_K^2} \simeq \omega_e^{T_H^2}/2 \simeq 0.072$.

4.4.5 Hyperchaos

Hyperchaos $CS H_C$ Pour $Ra = 3.65 \times 10^8$, les dynamiques périodiques T_L^1 deviennent instables. L'espace CS , sous réserve de dynamiques non répertoriées, ne possède plus de dynamiques stables. La dynamique s'articule alors autour d'un attracteur dont la structure, proche de $Ra = 3.65 \times 10^8$, rappelle les dynamiques T_L^1 (fig. 4.36a). Le calcul des exposants de Lyapunov donne $\lambda_1 > 0$ pour $Ra = 3.65 \times 10^8$ (fig. 4.36b), traduisant le passage à une dynamique chaotique. À mesure que Ra augmente, la topologie de l'attracteur chaotique change et ne correspond plus à aucune dynamique connue (voir figs. 4.36c et e). Le calcul des trois premiers exposants de Lyapunov estime $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, 0)$ et suggère le caractère hyperchaotique de l'attracteur. Ce chaos, nommé H_C , est la dernière dynamique observée sur l'espace des solutions CS jusqu'à $Ra = 4.0 \times 10^8$.

Hyperchaos $NCS H$: À partir de $Ra \simeq 3.65 \times 10^8$, la solution T_K^1 devient instable. Les trois premiers exposants de Lyapunov sont évalués à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, +)$ (voir Fig. 4.37d et h), et traduisent une dynamique devenue hyperchaotique (plus d'un exposant de Lyapunov strictement positif). Le portrait de phase de cette dynamique, nommée H , ne présente aucune structure particulière (Figs. 4.37a et e). Cet attracteur a pu être suivi sur la plage $3.56 \times 10^8 \leq Ra \leq 4.0 \times 10^8$. Le calcul de $C_{av}(\tau)$, converge vers 0 à temps long et indique que l'attracteur H possède une structure fractale (Figs. 4.37c et g), confirmant sa nature chaotique. Les distributions spectrales associées à ces dynamiques sont denses et présentent un bruit de fond d'amplitude comparable à l'amplitude des pulsations ω_p (Figs. 4.37b et f). Cet hyperchaos devient à partir de $Ra \simeq 3.65 \times 10^8$, et sous réserve de l'existence d'autres dynamiques stables non répertoriées, la seule dynamique *NCS stable du système*. L'attracteur obtenu a été suivi jusqu'à $Ra = 4.0 \times 10^8$.

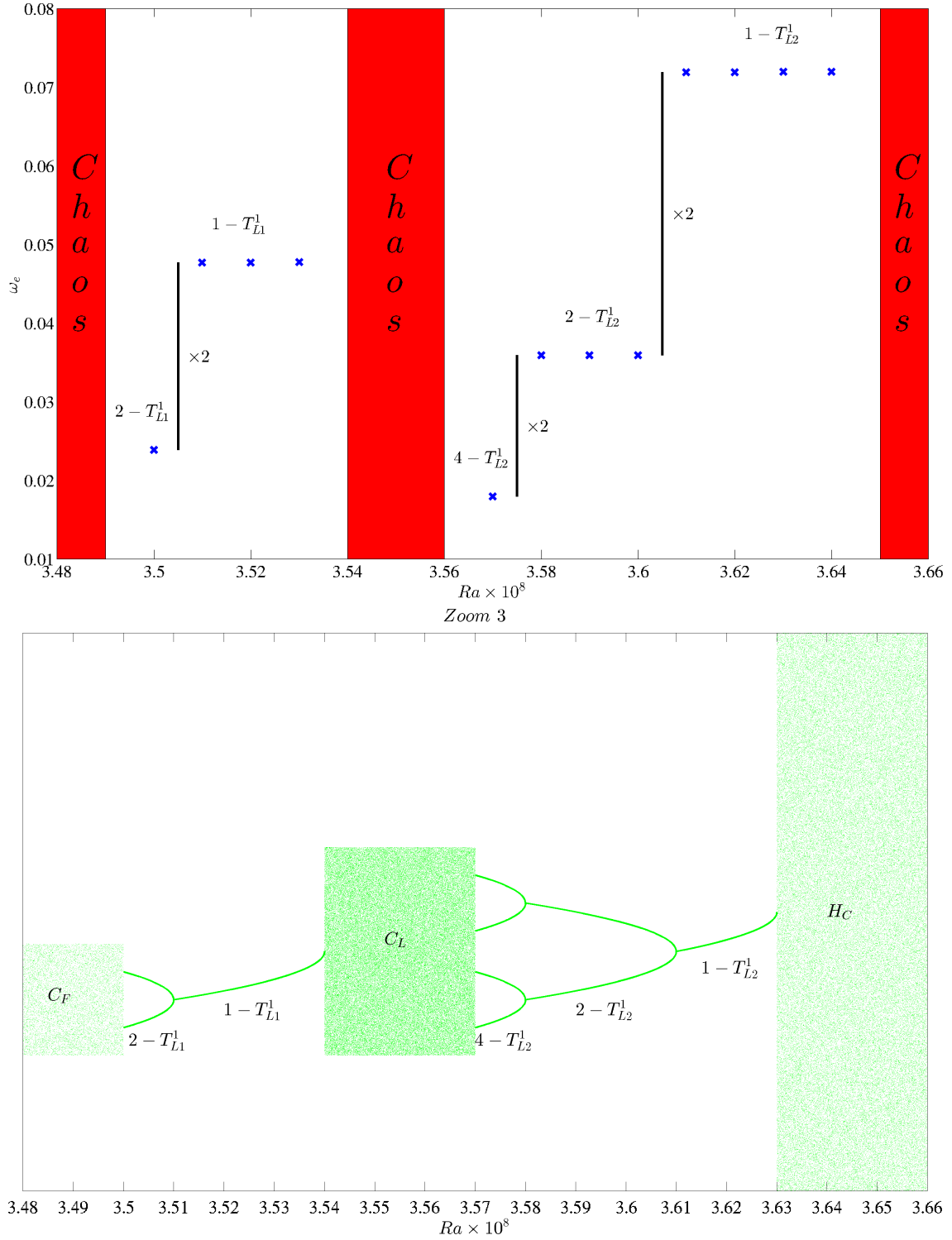


FIGURE 4.34 – Haut : $\omega_e = f(Ra)$ pour les dynamiques T_L^1 . Bas : diagramme de bifurcation schématisant les dynamiques T_L^1 . Les chaos C_F , C_L et H_C sont indiqués par des nuages de points. ([Retour au texte](#))

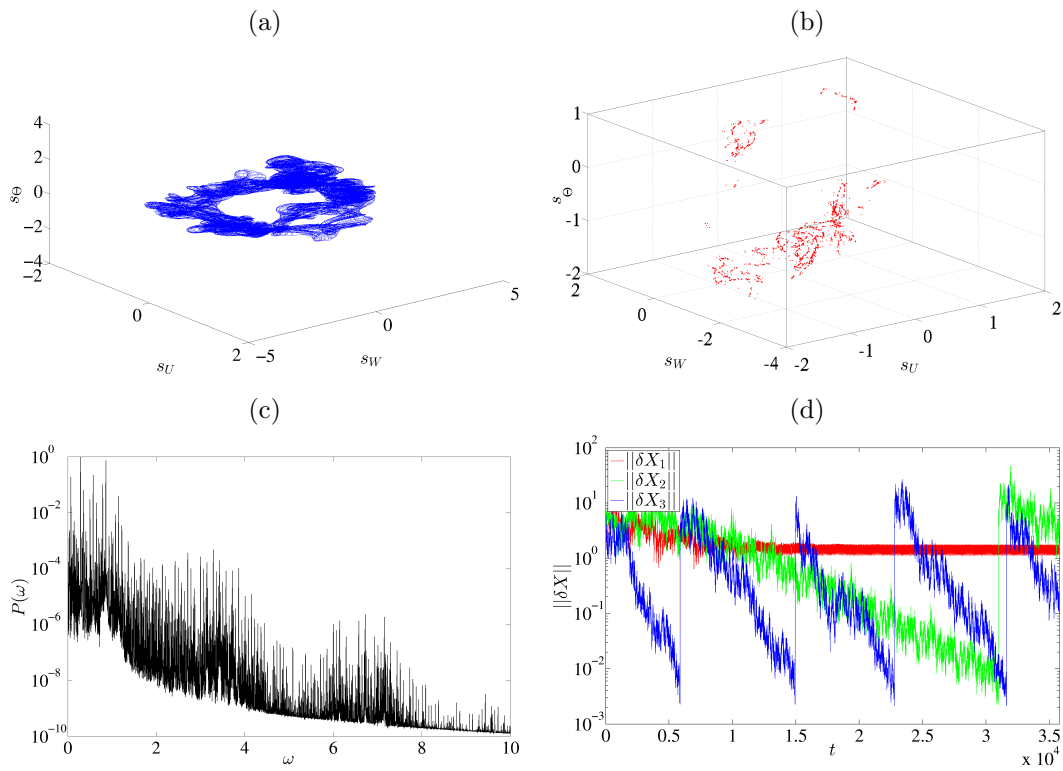


FIGURE 4.35 – Dynamique T_K^1 pour $Ra = 3.54 \times 10^8$. (a) Portrait de phase. (b) Section de Poincaré prise en $hs_U = 0$, $dhs_U/dt > 0$. (c) Distribution spectrale obtenue sur l'énergie cinétique. (d). Évolution des normes $\|\delta X\|_i$, $i = 1, 2, 3$ en fonction du temps. Les trois plus grands exposants de Lyapunov sont évalués à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ pour $\tau_\lambda = 87$. ([Retour au texte](#))

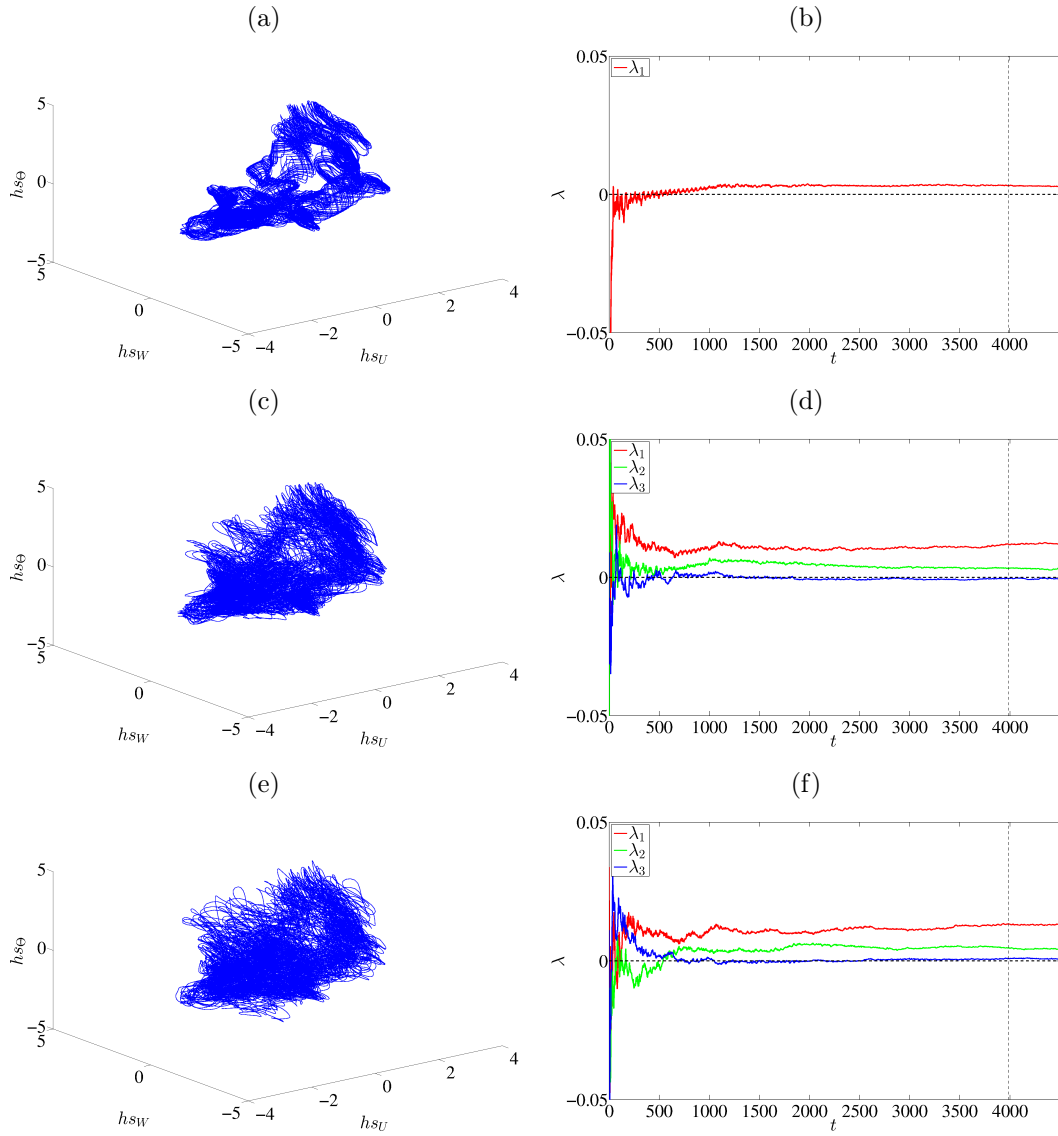


FIGURE 4.36 – Colonne de gauche : portraits de phase des dynamiques H_C , droite : $\lambda_i = f(t)$ pour $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. (a)-(b) $Ra = 3.65 \times 10^8$. Le plus grand exposant de Lyapunov est évalué à $\lambda_1 > 0$. (c)-(d) $Ra = 3.71 \times 10^8$. Les trois premiers exposants de Lyapunov sont évalués à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, \geq 0)$. (e)-(f) $Ra = 3.79 \times 10^8$. Les trois premiers exposants de Lyapunov sont évalués à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, +)$. ([Retour au texte](#))

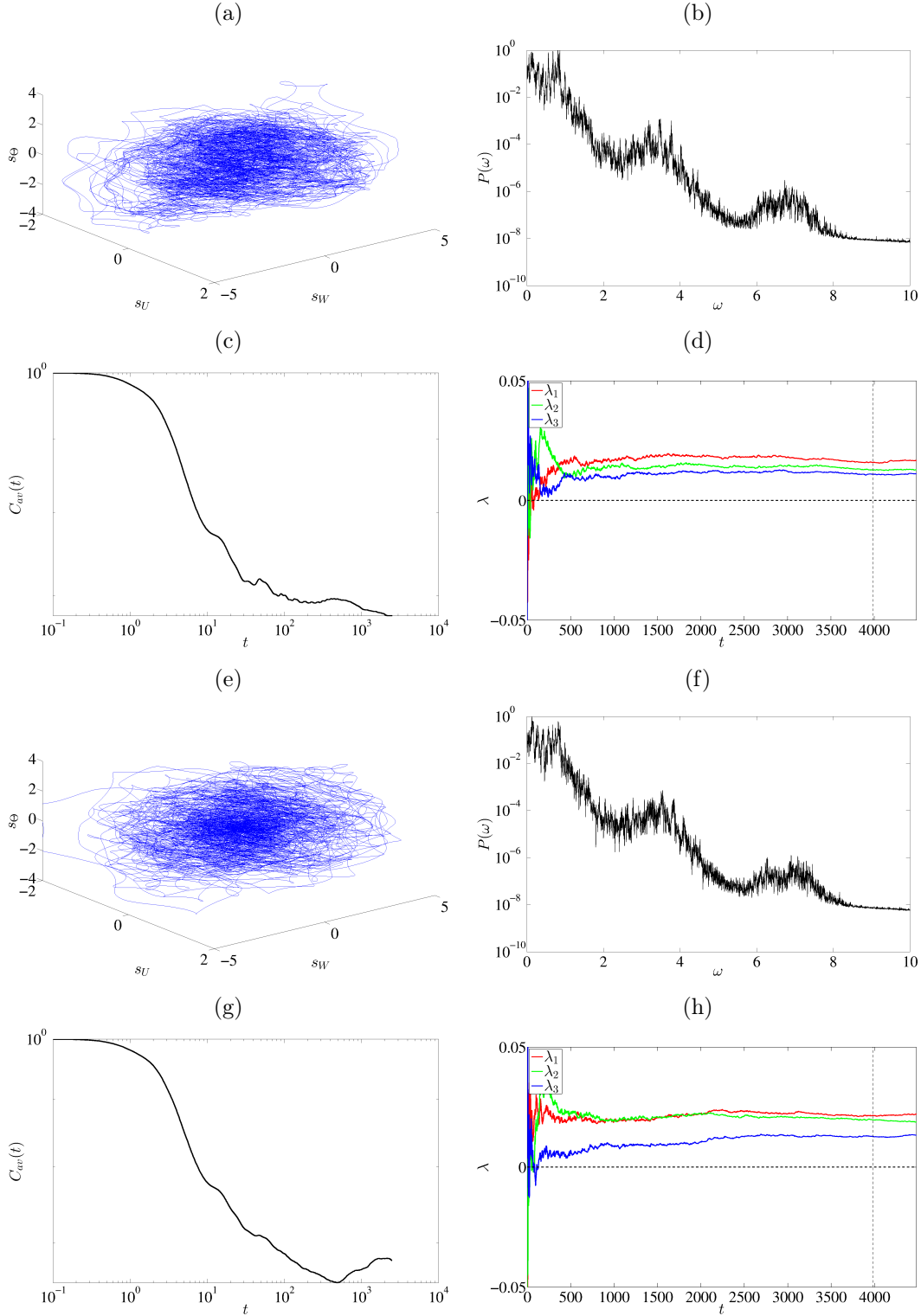


FIGURE 4.37 – Hyperchaos H . $Ra = 3.65 \times 10^8$. (a) Portrait de phase. (b) Distribution spectrale calculée sur l'énergie cinétique E_k . (c) $C_{av}(t)$. (d) $\lambda_i = f(t)$, $i = 1, 2, 3$. Les trois premiers exposants de Lyapunov sont évalués à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, +)$, pour $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. $Ra = 4.00 \times 10^8$. (e) Portrait de phase. (f) Distribution spectrale calculée sur l'énergie cinétique E_k . (g) $C_{av}(t)$. (h) $\lambda_i = f(t)$, $i = 1, 2, 3$. Les trois premiers exposants de Lyapunov sont évalués à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, +)$ pour $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. ([Retour au texte](#))

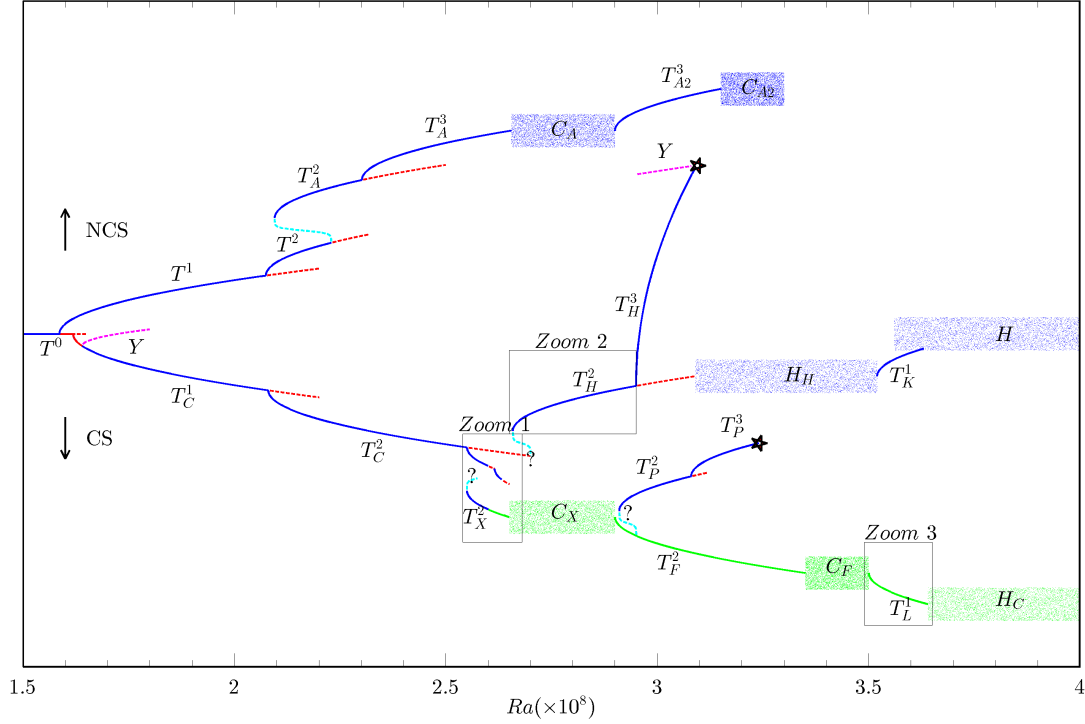


FIGURE 4.38 – Diagramme de bifurcations schématisant l'ensemble des dynamiques explorées dans la cavité différentiellement chauffée 2D, $Pr = 0.71$ et $A = 2$. Le zoom 1 est représenté sur la fig. 4.15, le zoom 2 sur la fig. 4.19 et le zoom 3 sur la fig. 4.34. Toute branche orientée vers le bas indique une dynamique CS , toute branche orientée vers le haut une dynamique NCS . Les dynamiques stables du système sont représentées en bleu, les dynamiques instables en rouge. Les dynamiques stables dans le sous-espace CS mais instables vis à vis de perturbations NCS sont représentées en vert. Les régime instables suggérés reliant deux dynamiques hystérétiques sont en bleu clair. Les nuages de points représentent les régimes chaotiques. ([Retour au texte](#))

4.5 Diagrammes de bifurcations

Le diagramme de bifurcation global des dynamiques identifiées est donné sous la forme de schéma en Fig. 4.38. Les différents zooms sont représentés sur les figures 4.15, 4.19 et 4.34. Ces quatre diagrammes récapitulent de façon schématisée chacune des dynamiques identifiées dans cette étude. Nous présentons également d'autres diagrammes de bifurcations, quantitatifs, sur lesquels certaines dynamiques peuvent être identifiées.

Le premier d'entre eux est un diagramme représentant l'amplitude des spectres de puissance en fonction de Ra et ω . Ces diagrammes, présentés en figure 4.39 permettent le suivi des différentes pulsations apparaissant dans chacune des dynamiques explorées. Ainsi, pouvons nous y observer les différentes transitions du système. Cet outil, très utile pour rechercher différentes dynamiques, devient très complexe à interpréter dès lors qu'une ou plusieurs dynamiques hystérétiques se trouvent représentées sur la même figure. Dans ce cas, le suivi de branche passe alternativement d'une branche à une autre, tel qu'illustré sur la figure 4.39b dans la plage C_{A2}/H_H .

Le troisième type de diagramme que nous proposons est un digramme quantitatif basé sur les indicateurs de symétrie : (s_{\min}, s_{\max}) . La caractérisation par s_{\min} permet de quantifier la distance de l'attracteur observé au sous-espace CS . La caractérisation par s_{\max} permet de voir si un régime

est CS (auquel cas $s_{\max} = 0$). Le diagramme de bifurcation $(s_{\min}, s_{\max}) = f(Ra)$ est montré sur la figure 4.40a. Ce diagramme permet de distinguer les branches principales NCS et rend claire l'apparition des tores T_A^3 , par opposition aux diagrammes des spectres en puissance (fig. 4.39) où la transition $T_A^2 \rightarrow T_A^3$ n'apparaît pas clairement. Nous y distinguons également l'apparition des régimes T_H^2 , la transition avec T_H^3 ainsi que la transition $T_P^2 \rightarrow T_P^3$.

La Fig. 4.41a montre un zoom sur $Ra \in [2.6, 3.1] \times 10^8$. Autour de $Ra \simeq 2.66 \times 10^8$, qui marque l'apparition de la dynamique T_H^2 (en vert sur la figure). Nous voyons que s_{\min} diminue tandis que s_{\max} augmente. Ces deux dernières observations nous laissent à penser que :

1. T_H^2 n'est pas issu du sous-espace CS . Dans le cas contraire, s_{\min} et s_{\max} devraient tendre vers zéro.
2. Au vu de la ressemblance des portraits de phase en (E_k, E_Θ) entre T_H^2 et T_C^2 , T_H^2 pourrait être une bifurcation sous-critique de T_C^2 instable (voir Fig. 4.21 et paragraphe associé).

Les mêmes observations s'appliquent quant à la transition $T_P^2 \rightarrow T_P^3$.

L'autre aspect sur lequel la figure 4.41a nous renseigne concerne l'ensemble des solutions instables Y (voir §2.7) qui sépare les dynamiques issues de CS des dynamiques issues de T_A^2 . Cet ensemble constitue une frontière instable dont l'importance apparaît dans la zone d'intermittence : les solutions ayant une condition initiale proche du sous-espace CS ne convergent pas vers la dynamique stable T_A^3 pour $Ra \in [2.6, 2.6587] \times 10^8$. La frontière Y devient alors responsable d'une ré-injection des solutions vers le sous-espace CS .

Par ailleurs, l'indicateur s_{\max} pour la dynamique T_H^3 autour de $Ra \simeq 3.0 \times 10^8$ (Fig. 4.41a partie droite), ne fait qu'augmenter. Or, nous avons établi au §4.4.1 que lorsque T_H^3 disparaît pour $Ra > 3.08 \times 10^8$, la dynamique s'établit autour de T_{A2}^3 . Ce dernier point traduit la disparition de la frontière Y . Au vu de l'augmentation de s_{\max} , nous pensons que cette disparition pourrait être due à une collision entre le tore T_H^3 et l'ensemble des solutions instables Y . Auquel cas, la frontière Y pourrait avoir explosé et serait devenue 'poreuse', si elle n'a pas disparu. Ce scénario de bifurcation est illustré sur les figures 4.42.

Le diagramme montré en Fig. 4.40b ($d_s = s_{\max} - s_{\min} = f(Ra)$) présente, de manière simplifiée, les mêmes conclusions que le diagramme $(s_{\min}, s_{\max}) = f(Ra)$. Ces diagrammes en symétries ont toutefois l'inconvénient de ne pas pouvoir rendre compte des dynamiques du sous-espace CS (s_{\max} et s_{\min} y étant toujours nuls).

Le dernier diagramme de bifurcation par symétrie donné ici représente l'indicateur moyen de symétrie $S = f(Ra)$. Ce diagramme est montré sur la Fig. 4.41b. Nous y distinguons les dynamiques symétrique S comme les dynamiques pour lesquels la quantité $S \simeq 0$. Cette représentation a l'avantage de montrer de façon quantitative les différentes bifurcations fourches subies par T_H^2 (en vert sur la figure).

Les derniers diagrammes de bifurcations présentés dans cette étude considèrent les énergies thermiques et cinétiques E_k et E_Θ auxquelles est retranchée leur moyenne temporelle respective. Deux types de diagrammes sont proposés. Le premier représente les valeurs maximales et minimales de $\delta E_\Theta = E_k - \langle E_k \rangle = f(Ra)$ (fig. 4.43a) et $\delta E_\Theta = E_\Theta - \langle E_\Theta \rangle = f(Ra)$ (fig. 4.43b) avec $\langle \cdot \rangle$ la moyenne temporelle. Le second type de diagramme considère quant à lui les distances

$$\Delta E_k = \max_t(\delta E_k) - \min_t(\delta E_k) \quad (4.1)$$

et

$$\Delta E_\Theta = \max_t(\delta E_\Theta) - \min_t(\delta E_\Theta) \quad (4.2)$$

et sont montrés sur les figures 4.44a et 4.44b respectivement. Ces quatre représentations permettent d'obtenir une identification claire de chacune des dynamiques du système (qu'elles soient CS ou non) et permettent de suivre facilement les différentes transitions d'une dynamique (exemple de la dynamique $T_C^1 \rightarrow T_C^2 \rightarrow T_{C2}^2$, en orange sur les figures). Elles ne peuvent cependant pas rendre compte de la symétrie d'un régime observé.

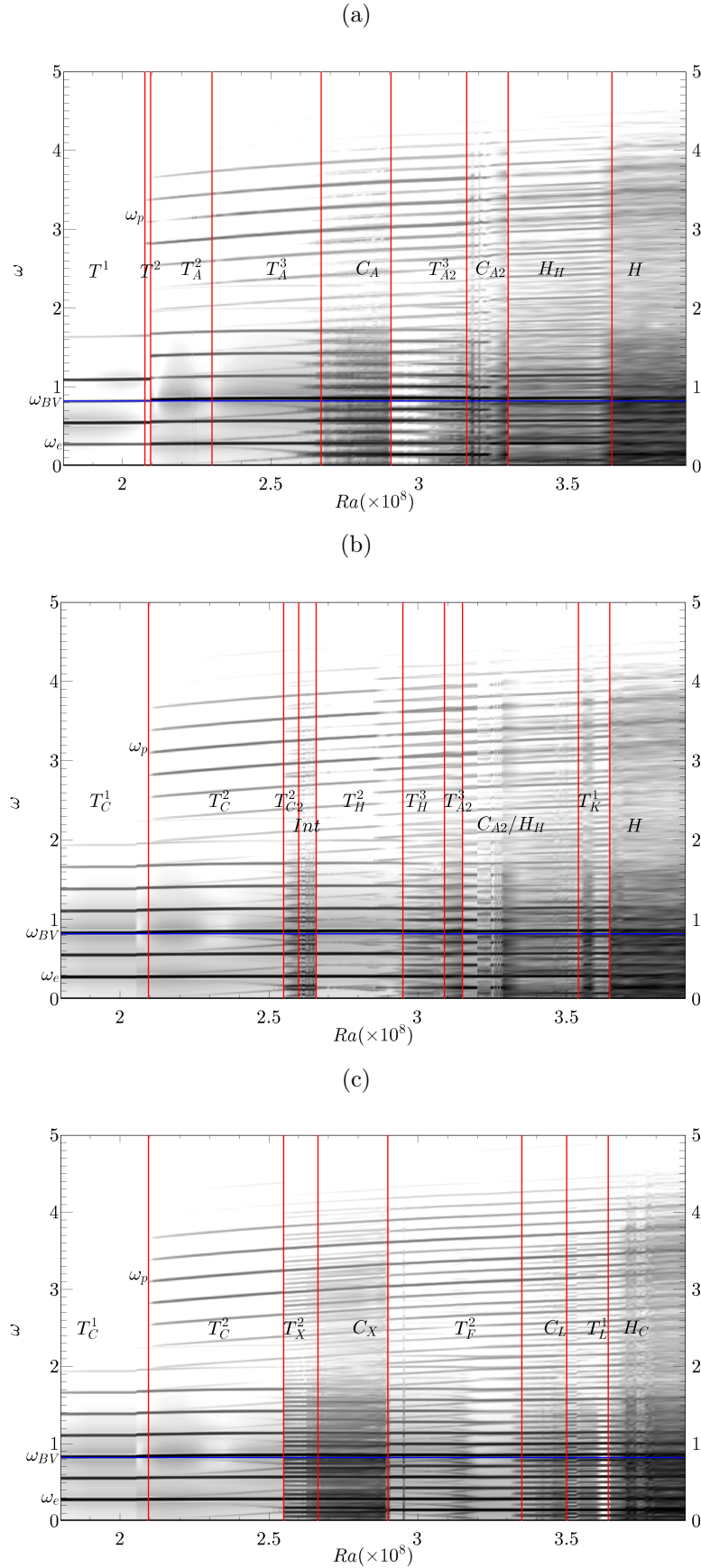


FIGURE 4.39 – Diagrammes de bifurcation de la cavité en représentation (Ra, ω) . (a) Dynamiques issues de la dynamique T^1 . (b) Dynamiques issues de la dynamique T_C^1 . (c) Dynamiques observées à centro-symétrie imposée. ([Retour au texte](#))

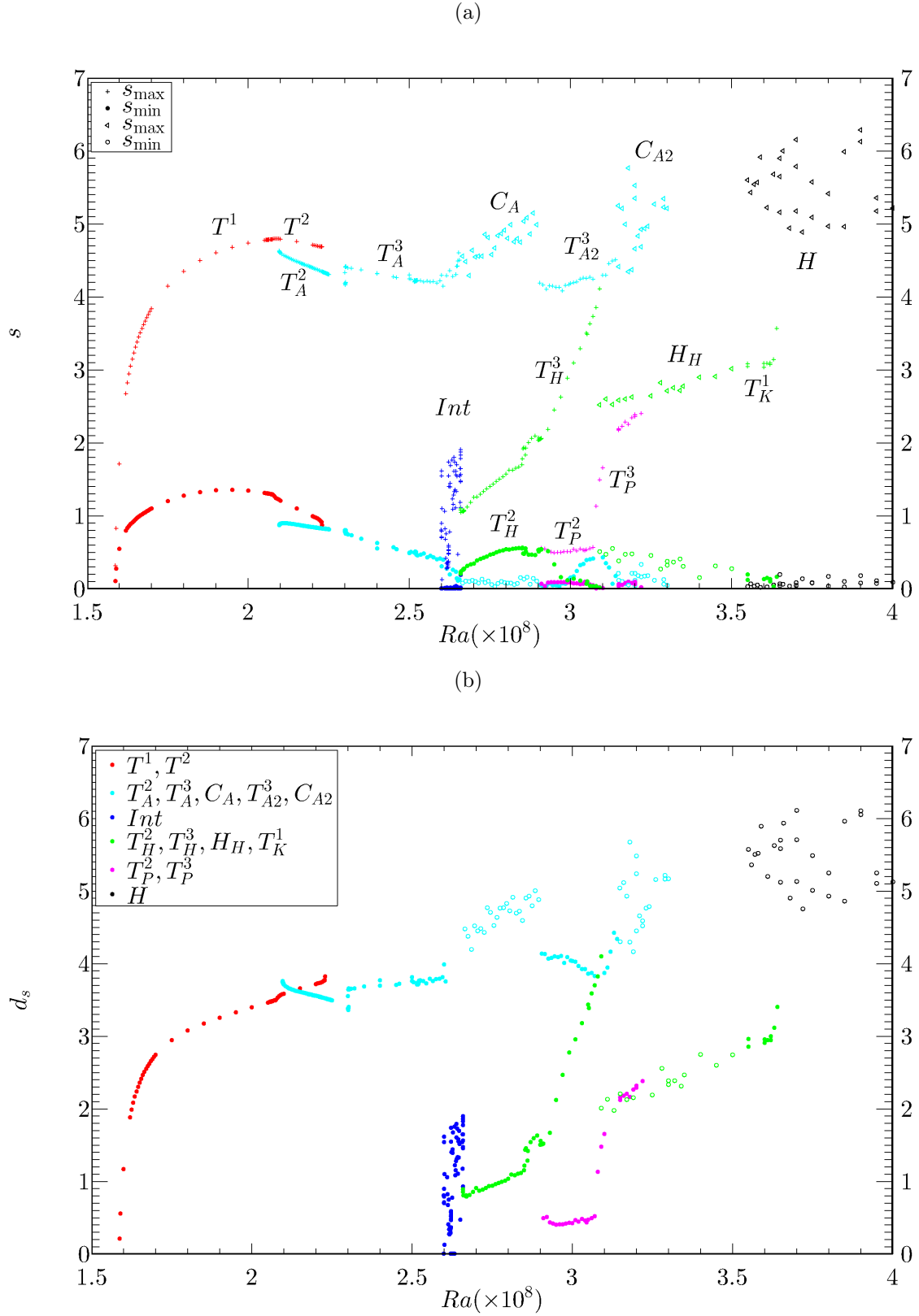


FIGURE 4.40 – Diagrammes de bifurcation représentant les symétries du système. (a) ($s_{\min} = \min_t(s(t))$, $s_{\max} = \max_t(s(t))$) = $f(Ra)$. (b) $d_s = s_{\max} - s_{\min} = f(Ra)$. Les symboles pleins indiquent les régimes stables, les vides les régimes chaotiques. Les dynamiques sont indiquées dans la légende par ordre d'apparition. ([Retour au texte](#))

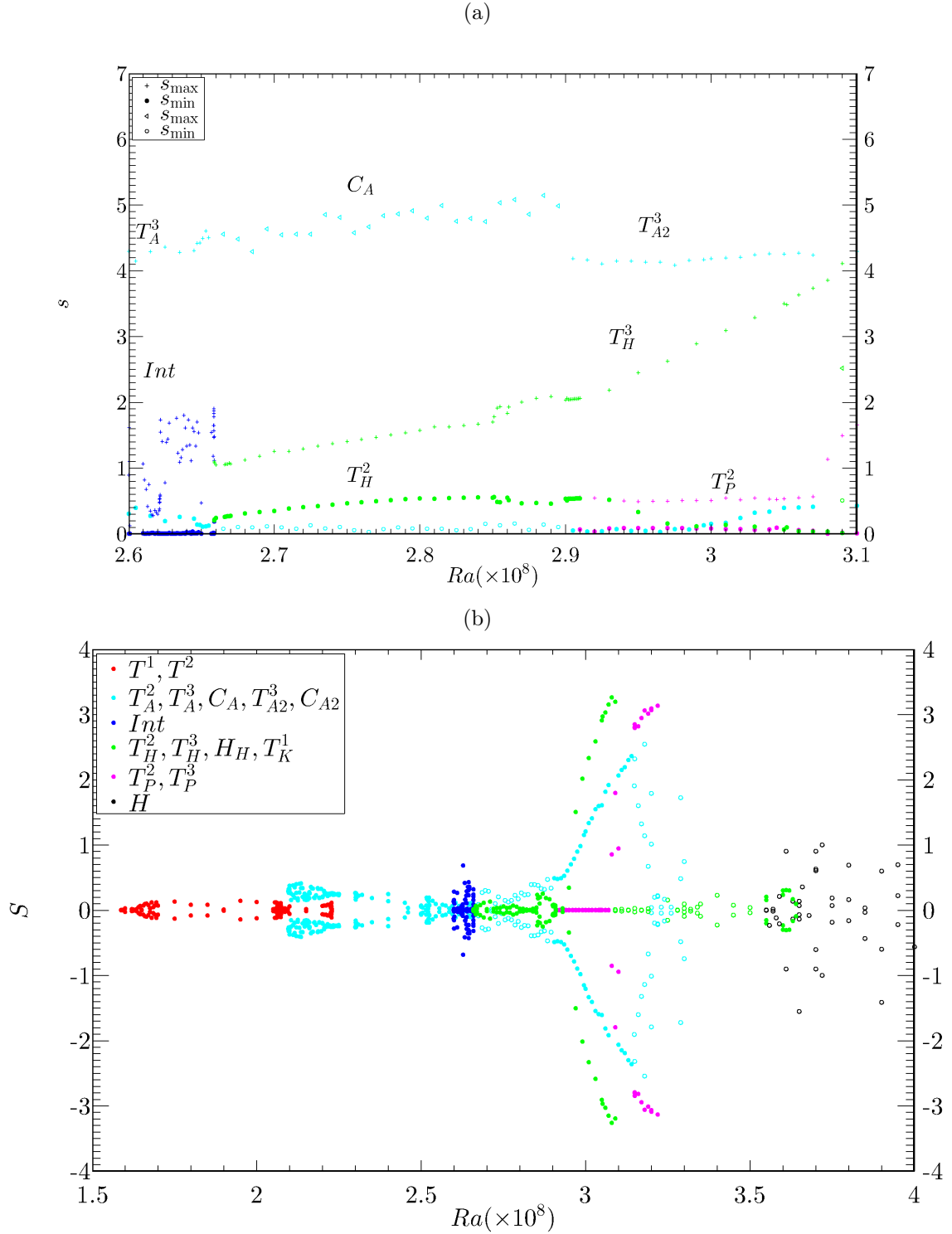


FIGURE 4.41 – (a) Zoom sur Ra dans $[2.6, 3.1] \times 10^8$ de la figure 4.40a. (b) Diagramme de bifurcation

$S = \frac{1}{T} \int_0^T (s_U(t) + s_W(t) + s_\Theta(t)) dt = f(Ra)$. Les dynamiques symétriques S vérifient $S \simeq 0$.

L'indicateur moyen de symétrie S pouvant être positif ou négatif, les valeurs présentées ont été symétrisées par rapport à $S = 0$ pour plus de lisibilité. Les symboles pleins indiquent les régimes stables, les vides les régimes chaotiques. Les dynamiques sont indiquées dans la légende par ordre d'apparition. ([Retour au texte](#))

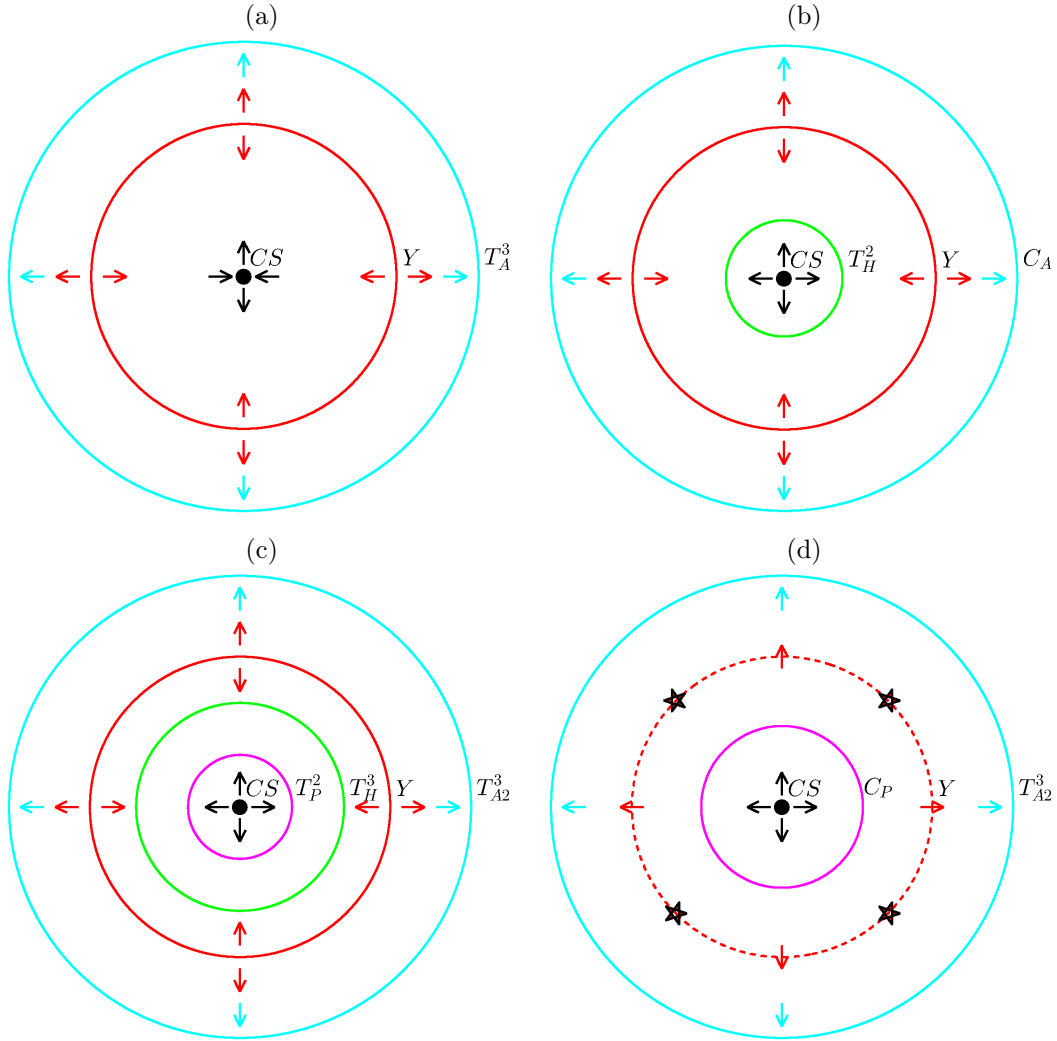


FIGURE 4.42 – Schéma des bifurcations (supposées) pour Ra dans $[2.6, 3.09] \times 10^8$. (a) Zone intermittente : le sous-espace CS est instable, mais la présence de la frontière Y force la dynamique à retourner vers le sous-espace CS . T_A^3 est stable. (b) T_A^3 devient C_A et T_H^2 stable apparaît marquant la fin de l’intermittence. (c). T_H^2 bifurque vers T_H^3 , lequel grandit et se rapproche de Y . C_A bifurque en T_{A2}^3 stable. T_P^2 apparaît. (d) T_H^3 entre en collision avec Y et Y disparaît. ([Retour au texte](#))

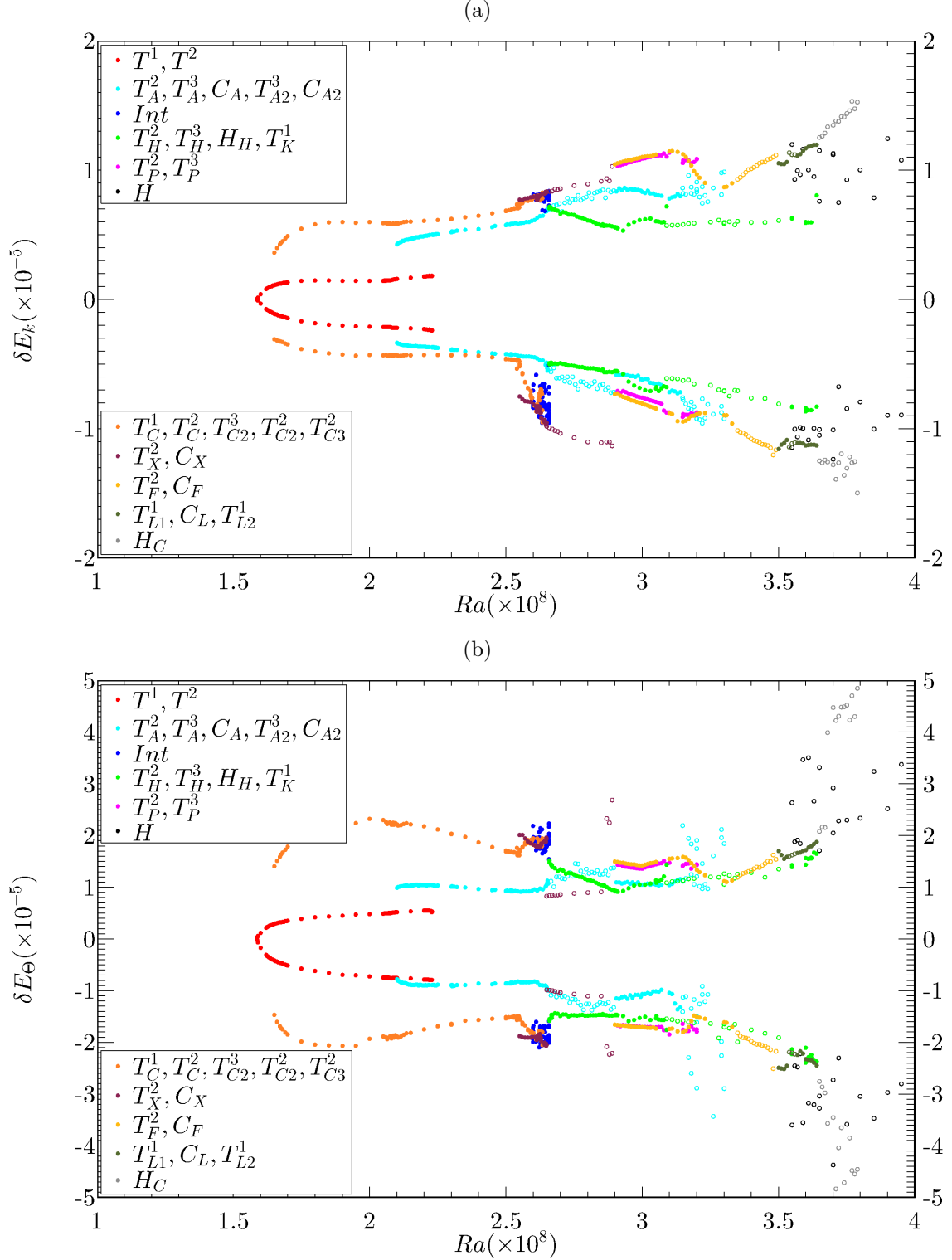


FIGURE 4.43 – Diagrammes de bifurcations des fluctuations d'énergies (a) $\delta E_k = E_k - \langle E_k \rangle = f(Ra)$ et (b) $\delta E_\Theta = E_\Theta - \langle E_\Theta \rangle = f(Ra)$. Ne sont représentées que les valeurs maximales et minimales de δE_k et δE_Θ . Les cercles plein indiquent les régimes stables, les cercles vides les régimes chaotiques. Les dynamiques sont indiquées dans la légende par ordre d'apparition. ([Retour au texte](#))

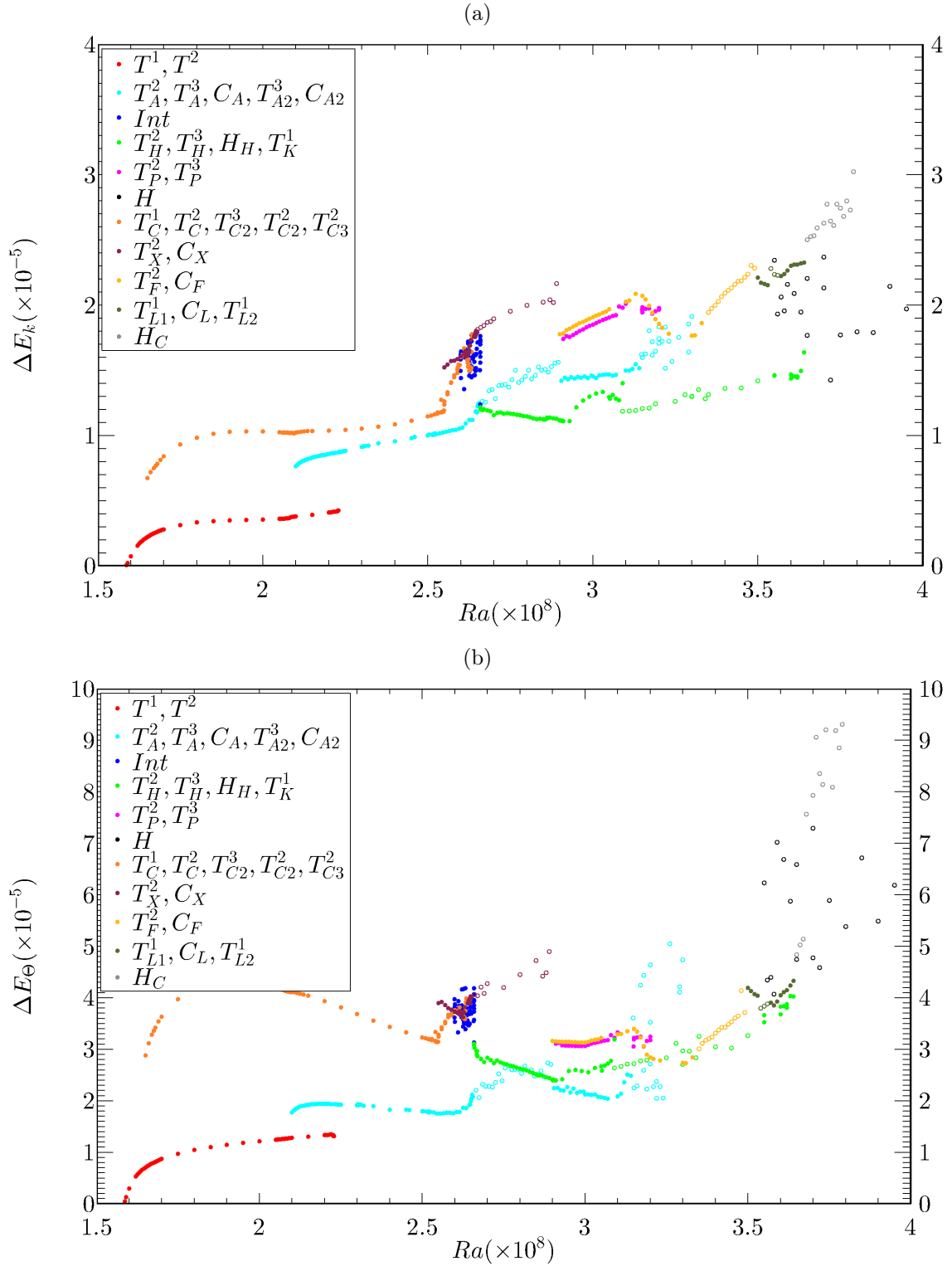


FIGURE 4.44 – Diagrammes de bifurcations des écarts (a) $\Delta E_k = \max_t(\delta E_k) - \min_t(\delta E_k) = f(Ra)$ et (b) $\Delta E_\Theta = \max_t(\delta E_\Theta) - \min_t(\delta E_\Theta) = f(Ra)$. Les cercles plein indiquent les régimes stables, les cercles vides les régimes chaotiques. Les dynamiques sont indiquées dans la légende par ordre d'apparition. ([Retour au texte](#))

4.6 Conclusions et perspectives

Ce paragraphe résume les résultats obtenus pour l'étude de la transition vers le chaos dans l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$, à nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ et de rapport d'aspect $A = 2$. Nous avons rappelé au chapitre 2 que les résultats de précédentes études montrent l'existence de deux routes principales. L'une préserve la centro-symétrie du système (symétrie CS) et est composée des bifurcations $T^0 \rightarrow T_C^1 \rightarrow T_C^2$. La seconde route explorée ne maintient pas la centro-symétrie (route NCS) et se compose des bifurcations $T^0 \rightarrow T^1 \rightarrow T^2$. Chacune de ces routes est composée de deux modes périodiques. Un mode qui correspond à une oscillation en temps des zones de détachements aux coins de la cavité, combinée à la propagation d'une onde interne. Ce mode oscille à une fréquence inférieure à celle de Brunt-Väisälä. Le second mode est un mode de paroi qui se développe dans les couches limites de la cavité.

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence que la coexistence des solutions CS et NCS produit un scénario complexe de transition vers le chaos. Cette transition peut être découpée en quatre plages de Ra :

1. Avant $Ra \approx 2.65 \times 10^8$, deux routes différentes sont identifiées : la route NCS $T^0 \rightarrow T^1 \rightarrow T^2 \rightarrow T_A^2 \rightarrow T_A^3$ et la route CS $T^0 \rightarrow T_C^1 \rightarrow T_C^2 \rightarrow T_{C2}^3/T_X^2 \rightarrow T_{C2}^2/T_X^2 \rightarrow Int$. L'étude de la zone intermittente nous a révélé l'existence de deux dynamiques stables (T_S^1 et T_{C3}^2), une instable (T_X^2) et deux régimes intermittents différents Int_X et Int_{C2} .
2. Autour de $Ra \approx 2.65 \times 10^8$, nous avons montré les transitions au chaos $T_A^3 \rightarrow C_A$ et $T_X^2 \rightarrow C_X$ ainsi que l'apparition d'une autre dynamique quasi-périodique stable T_H^2 . Nos observations suggèrent que T_H^2 provient de T_C^2 instable par une bifurcation sous-critique. Nous avons mis en évidence que sur la branche T_H^2 plusieurs bifurcations fourches directes suivies de bifurcations fourches inverses existent avant $Ra \approx 2.9 \times 10^8$.
3. Pour $Ra \approx 2.9 \times 10^8$, toutes les dynamiques chaotiques se résorbent et les branches observées transitent vers de nouveaux régimes quasi-périodiques :
 - (a) le chaos C_A se résorbe en une dynamique quasi-périodique à 3 fréquences T_{A2}^3 . Cette dynamique présente la particularité d'avoir sa pulsation $\omega_e^{T_{A2}^3} \simeq \omega_e^{T_A^3}/2$, et suggère qu'une bifurcation par doublement de période a lieu sur T_A^3 (instable) dans la plage de chaos C_A ;
 - (b) T_H^2 bifurque en T_H^3 , lequel disparaît entre $Ra = 3.08 \times 10^8$ et $Ra = 3.09 \times 10^8$. Nous suggérons que cette disparition correspond à une collision entre T_H^3 et la frontière Y qui sépare les routes CS et NCS ;
 - (c) le chaos C_X se résorbe en une nouvelle dynamique quasi-périodique à 2 fréquences T_F^2 dans le sous-espace CS ;
 - (d) T_P^2 apparaît et devient T_P^3 pour $3.07 \times 10^8 < Ra \leq 3.08 \times 10^8$. Nos indicateurs suggèrent que T_P^2 est connecté à T_F^2 par une bifurcation sous-critique.

Jusqu'à $Ra \approx 3.1 \times 10^8$, aucune dynamique du système n'est chaotique. La zone [$Ra \approx 2.9 \times 10^8, Ra \approx 3.1 \times 10^8$] semble constituer une fenêtre de quasi-périodicité dans laquelle l'ensemble des dynamiques sont synchronisées sur des régimes T^2 ou T^3 .

4. Au delà de $Ra \approx 3.1 \times 10^8$, nous avons montré l'existence des transitions : $T_{A2}^3 \rightarrow C_{A2}$, la disparition de $T_P^3, T_F^2 \rightarrow C_F$ et l'apparition de l'hyperchaos H_H . Nos observations suggèrent que H_H provient de la dynamique T_H^2 instable. Pour $Ra = 3.35 \times 10^8$, tous les régimes observés sont au moins chaotiques, hyperchaotique pour H_H . Toutefois, nous avons mis en évidence l'existence d'une fenêtre d'accrochage à la fois dans l'espace CS et en dehors pour $3.5 \times 10^8 \gtrsim Ra \gtrsim 3.65 \times 10^8$. Cette fenêtre comprend les dynamiques périodiques, nommées T_L^1 , et la dynamique T_K^1 . Nous avons montré que les dynamiques T_L^1 subissent des doublements de période suivant Ra décroissant et sont entrecoupées par l'existence d'une fenêtre où la dynamique est chaotique C_L .

En sortie de cette fenêtre de périodicité, pour $Ra \approx 3.65 \times 10^8$, tous les régimes observés sont hyperchaotiques H pour les dynamiques NCS et hyperchaotiques H_C pour les dynamiques CS .

Finalement, nous avons proposé plusieurs types de diagrammes de bifurcations, à la fois qualitatifs et quantitatifs. Sous réserve d'autres dynamiques non détectées, ces diagrammes s'inscrivent comme des diagrammes de référence pour toute étude future menée dans cet écoulement, pour le même jeu de paramètres du rapport d'aspect A et du nombre de Prandtl Pr .

La complexité et la richesse des bifurcations présentes dans l'écoulement font de la cavité différentiellement chauffée $2D$, à $A = 2$ et $Pr = 0.71$, un cas d'école pour toute étude de bifurcations 'usuelles' (Hopf, fourches, doublement de période, transition à l'intermittence, route vers les chaos, ...) en plus des systèmes académiques traditionnels (tels que l'application logistique, les systèmes de Lorenz/Rössler, convection de Rayleigh-Bénard entre deux plaques infinies, ...).

Les perspectives à l'étude présentée sont nombreuses. Suivant Ra croissant, la première perspective consiste à trouver d'où provient T_X^2 . Cette dynamique est importante dans la route CS puisqu'elle est celle dont est issu le premier chaos centro-symétrique C_X .

Une autre perspective à l'étude consiste à comprendre pour quelle raison physique la région d'intermittence apparaît. De nos observations, le sous-espace CS devient instable autour de $Ra \simeq 2.6 \times 10^8$. A la suite de cette bifurcation, la dynamique devient alors intermittente autour de CS .

Malgré la taille réduite de la zone intermittente, il serait intéressant, du point de vue des systèmes dynamiques, de comprendre les mécanismes permettant l'apparition de la dynamique T_S^1 . Dans notre étude, nous avons mis en évidence que T_S^1 existe sur la même plage en Ra que l'accrochage T_X^1 (Ra dans $[2.616, 2.6213] \times 10^8$). De plus, nous avons montré que cette dynamique possède une pulsation enveloppe $\omega_e^{T_S^1} = \omega_e^{T_X^1}/2$ et que son portrait de phase en représentation (E_k, E_Θ) possède la même structure que T_X^1 . Enfin, la dynamique T_S^1 est S , la dynamique T_X^1 est CS . L'ensemble de ces indicateurs suggèrent que l'apparition de la dynamique T_S^1 se produit en raison de l'accrochage de T_X^2 sur T_X^1 . Nous n'avons cependant aucun élément permettant d'aller au-delà de cette constatation.

Au même titre que l'apparition de l'intermittence, nous n'avons pas non plus d'explication quant aux mécanismes physiques permettant l'apparition des dynamiques T_H^2 . Suivant les portraits de phases en (E_k, E_Θ) et du fait que $\omega_e^{T_H^2} \simeq \omega_e^{T_C^2}/2$, nous pensons cette apparition liée à une bifurcation sous-critique de T_C^2 instable. Nous n'avons cependant pas été en mesure d'aller plus loin dans cette hypothèse.

La troisième perspective à cette étude consiste à proposer un scénario de bifurcations expliquant pourquoi un doublement de période se produit dans la plage de chaos C_A . Nous avons établi que ce doublement de période porte sur la pulsation enveloppe $\omega_e^{T_A^3}$ mais ne connaissons pas les raisons physiques responsables de cette bifurcation (elle pourrait, par exemple, être issue d'une bifurcation sous-harmonique impliquant des modes internes de la cavité).

En quatrième perspective nous aimerions comprendre la résorption simultanée des chaos $C_A \rightarrow T_{A2}^3$ et $C_X \rightarrow T_F^2$ ainsi que la transition $T_H^2 \rightarrow T_H^3$ et l'apparition de T_P^2 pour $Ra \approx 2.90 \times 10^8$. Sachant que les fréquences varient avec Ra , le fait que ces dynamiques bifurquent pour des valeurs de Ra similaires doit probablement résulter d'un accrochage en fréquence.

Un cinquième point qui mérite l'attention porte sur les synchronisations T_K^1 et T_L^1 . Le fait que ces deux dynamiques apparaissent pour des valeurs de Ra similaires ($Ra \in [3.50, 3.65] \times 10^8$) suggère un mécanisme commun pour expliquer cette plage de synchronisation.

La sixième perspective à ce travail consiste à comprendre la nature de T_K^1 . Malgré l'ensemble des outils dont nous disposons, nous n'avons pu trancher sur la nature de cette dynamique. Est-elle de type T^n , $n \geq 1$? Ou s'agit-il ici d'un autre type d'attracteur tel qu'un attracteur étrange non chaotique (*Strange Non chaotic Attractors*)?

Enfin, malgré notre inspection minutieuse en Ra sur la plage d'étude $[1.57, 4.0] \times 10^8$, il est probable que certaines dynamiques n'ont pas été observées. Ces branches manquantes pourraient

aider à comprendre l'ensemble des points soulevés ci-dessus.

De façon plus générale, les perspectives à cette étude s'inscrivent en regard d'une variation du rapport d'aspect de la cavité A . Xin et Le Quéré [82] ont montré que, pour $A \gtrsim 3.5$, le premier mode instable de l'état stationnaire de la cavité se forme dans les couches limites. Pour $A \gtrsim 3.5$, la première bifurcation du système correspond aux mécanismes physiques permettant la transition $T^1 \rightarrow T^2$ (ou de façon équivalente $T_C^1 \rightarrow T_C^2$) dans le cas $A = 2$. Il est dès lors attendu que l'ensemble du diagramme de bifurcation proposé dans cette étude soit modifié en conséquence. Il convient donc de conduire une étude des bifurcations pour $A > 2$, mais également pour $A < 2$, afin d'observer dans quelle mesure les dynamiques observées dans notre étude en sont affectées.

De même que A , deux autres paramètres peuvent être variés pour la cavité $2D$. Le premier d'entre eux est le nombre de Prandtl Pr . Burroughs *et al* [11] ont établi que, pour $A = 2$ et $Pr \lesssim 0.64$, les premiers modes instables correspondent aux modes de couches limites. Le second paramètre pouvant être varié est l'angle γ entre la force de pesanteur et le gradient thermique. Dans notre étude, $\gamma = \pi/2$. Nous savons également que $\gamma = \pi$ correspond à une configuration de type Rayleigh-Bénard confinée. De telles études ont déjà été réalisées dans le cas de cavités tridimensionnelles cubiques [61],[73]. La richesse des dynamiques observées et la complexité des diagrammes de bifurcations produits laissent à penser que la variation de l'angle ferait également apparaître de nombreuses nouvelles dynamiques. Peut être que certaines d'entre elles permettraient, par continuation, de répondre aux questions soulevées ci-dessus.

Enfin, notre étude s'est placée dans le cas d'une cavité différentiellement chauffée où les perturbations $3D$ ont été négligées. Les bifurcations répertoriées dans cette étude devraient être comparées au cas d'une cavité $3D$ infinie, ainsi que pour une cavité $3D$ suffisamment confinée dans la direction transverse pour empêcher l'apparition de l'instabilité tridimensionnelle. Ce second cas pourrait toutefois substantiellement modifier nos observations en raison de l'ajout de deux conditions aux limites supplémentaires.

Conclusion générale

Nous reprenons dans ce chapitre les conclusions données aux §3.7 pour la partie lagrangienne de l'étude et au §4.6 pour les transitions vers le chaos eulérien de l'écoulement. Lors de notre étude, nous avons étudié numériquement l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$. La cavité est prise deux fois plus haute que large (rapport d'aspect $A = 2$) remplie d'air (nombre de Prandtl $Pr = 0.71$) sous l'approximation de Boussinesq. Le nombre de Rayleigh Ra du système, basé sur la hauteur de la cavité est choisi comme paramètre de contrôle de l'écoulement.

Nous avons traité le cas de cet écoulement du point de vue lagrangien quantifiant le mélange de traceurs non-diffusifs lorsque l'écoulement est oscillant périodique (T^1). Nous avons montré l'existence de zones de mélanges distinctes séparées par des zones dans lesquelles le mélange n'est pas possible. Nous avons montré que le mélange provient de points périodiques instables de l'écoulement pour lesquels les variétés stables et instables (directions de contraction et dilatation des points périodiques) forment des enchevêtrements homoclines et/ou hétéroclines. Lors de ces croisements, un nombre infini de points homoclines/hétéroclines sont créés et sont localement responsable d'une dynamique chaotique pour les particules, et donc de mélange.

À l'inverse, nous avons montré que certaines lignes de courant de l'écoulement stationnaire (instable) subsistent après la transition à l'écoulement eulérien périodique, sous la forme de trajectoires toroïdales (tores KAM). Ces trajectoires, qui ne possèdent ni direction dilatante, ni direction contractante, agissent comme des trajectoires marginalement stables sur lesquelles un traceur évolue indéfiniment au cours du temps. L'existence de ces trajectoires se traduit par des frontières matérielles pour les traceurs non-diffusifs et empêche le mélange produit localement par les enchevêtrements homoclines/hétéroclines d'atteindre l'ensemble de la cavité.

Ces résultats confirment de précédentes études théoriques (voir [68], [78]) dans le cas où l'écoulement reste proche du seuil de l'instationnarité Ra_c . Dans cette étude, nous avons examiné à quel point ces conclusions sont affectées pour Ra loin de Ra_c lorsqu'un grand nombre de tores KAM ont résonné.

En nous basant sur l'extraction d'un grand nombre d'orbites périodiques instables lagrangiennes, nous avons pu établir un protocole nous permettant de caractériser et de quantifier le mélange dans l'ensemble de la cavité pour une valeur de Ra donnée. Ce protocole, introduit sous le terme de *spreading maps*, consiste à détecter un ensemble de points périodiques instables. Une fois les points identifiés, un disque de particule est placé dans le voisinage de chacun des points (disque de rayon extérieur de 10^{-7}) et suivi à la fois en temps croissant, et à la fois en temps rétrograde. La description à temps court de l'éclatement des disques de particules permet de représenter les variétés stables et instables des points, l'éclatement à temps long des disques permet de caractériser la zone de mélange associée à chacune des orbites identifiées. Si des tores KAM existent, ces zones de mélange sont alors confinées dans une certaine partie de la cavité et le mélange est local. À l'inverse, en l'absence de barrières au mélange, nous avons montré que le mélange dans la cavité devient global.

Ce protocole nous permet de connaître la fraction de chaos (et donc de mélange) présente dans le système pour toute valeur de Ra dans laquelle l'écoulement est périodique. Nous avons montré que si cette fraction de chaos atteint 100%, alors le mélange peut être considéré comme couvrant l'ensemble de la cavité. Nous avons ainsi pu établir que l'écoulement devient complètement mélangeant avant de devenir quasi-périodique en temps.

Nous avons finalement pu extraire le taux de mélange du système pour la valeur de Ra la plus élevée considérée dans cette étude lagrangienne. Nous avons montré que la décroissance de la variance de la concentration de traceurs à temps long traduit la non-hyperbolicité de la dynamique, et donc la subsistance de tores KAM (dont font partie les parois de la cavité).

La seconde partie de cette étude porte sur la détermination des transitions qui rendent l'écoulement hyperchaotique, ou, par extension, turbulent.

Cette transition provient d'un point de bifurcation de codimension 2 à $Pr \approx 0.64$ [11]. Ce point de bifurcation particulier conditionne les bifurcations qui apparaissent à $Pr = 0.71$ sur toute la plage de notre étude. Nous distinguons ainsi la formation de deux 'routes' principales, l'une préserve la centro-symétrie du système (route CS), l'autre non (route NCS). Les transitions du système vers l'hyperchaos font intervenir plus d'une vingtaine de dynamiques mais peuvent être approximativement regroupées en quatre parties :

1. une partie périodique/quasi-périodique : pour $1.6 \times 10^8 \lesssim Ra \lesssim 2.65 \times 10^8$, hormis pour $2.6 \times 10^8 < Ra \gtrsim 2.65 \times 10^8$, les dynamiques identifiées sont toutes périodiques (T^1) ou quasi-périodiques (T^2 et T^3). Dans la plage $2.6 \times 10^8 \lesssim Ra \lesssim 2.65 \times 10^8$, l'espace CS est instable et la dynamique intermittente ;
2. un chaos partiel du système : Lorsque $2.65 \times 10^8 \lesssim Ra \lesssim 2.9 \times 10^8$, les dynamiques de la route CS et celles de la route NCS sont chaotiques, nommées C_X et C_A respectivement. Il existe toutefois un attracteur quasi-périodique T^2 stable, nommé T_H^2 ;
3. une résorption du chaos ou un "accrochage global" : Pour $2.9 \times 10^8 \lesssim Ra \lesssim 3.1 \times 10^8$, les régimes chaotiques C_X et C_A se synchronisent sur des dynamiques soit T^2 , soit T^3 . La dynamique T_H^2 bifurque en une dynamique T_H^3 et une autre dynamique NCS , T_P^2 apparaît. Cet accrochage global du système prend fin pour $Ra \approx 3.1 \times 10^8$;
4. la transition à l'hyperchaos : au-delà de 3.1×10^8 , hormis la fenêtre de périodicité pour $3.5 \times 10^8 \lesssim Ra \lesssim 3.65 \times 10^8$, toutes les dynamiques détectées ont soit disparues, soit sont devenues chaotiques voir hyperchaotiques.

Notre étude a mis en évidence que le chaos lagrangien apparaît dès que l'écoulement devient périodique en temps, à l'inverse du chaos eulérien qui nécessite une succession complexe de transitions. Nous pensons que ces différences entre points de vue (eulérien et lagrangien) sont génériques à de nombreux systèmes. L'évaluation lagrangienne des fonctions de Melnikov pour d'autres écoulements devrait permettre de savoir, à moindre coût, si le système répond à cette observation ou non.

La présence de chaos lagrangien ne garantit cependant pas que le système soit complètement mélangeant. Nous avons montré que, dans le cas de notre écoulement, le mélange est complet avant la quasi-périodicité. La question reste toutefois ouverte quant à d'autres écoulements et configurations géométriques.

De même, l'une des principales perspectives consiste à voir dans quelle mesure les résultats de notre étude sont généralisables au cas de géométries tridimensionnelles. Peu d'études sont disponibles sur le sujet, et nous pensons que cet axe de recherche est important tant du point de vue applicatif que fondamental.

Bibliographie

- [1] E. Åkervik et al. Steady solutions of the Navier-Stokes equations by selective frequency damping. *Physics of Fluids*, 18(6) :068102, 2006.
- [2] C. H. Amon, A. M. Guzmán, and B. Morel. Lagrangian chaos, Eulerian chaos, and mixing enhancement in converging-diverging channel flows. *Physics of Fluids*, 8(5) :1192–1206, 1996.
- [3] F. Ampofo and T. G. Karayiannis. Experimental benchmark data for turbulent natural convection in an air filled square cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(19) :3551–3572, 2003.
- [4] H. Aref. Stirring by chaotic advection. *Journal of Fluid Mechanics*, 143 :1–21, 1984.
- [5] H. Aref et al. Frontiers of chaotic advection. *arXiv :1403.2953*, 2014.
- [6] M. Avila, M. J. Belisle, J. M. Lopez, F. Marqués, and W. S. Saric. Mode competition in modulated Taylor–Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 601 :381–406, 2008.
- [7] G. K. Batchelor. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 12 :209–233, 1954.
- [8] G. K. Batchelor. Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid Part 1. General discussion and the case of small conductivity. *Journal of Fluid Mechanics*, 5 :113–133, 1959.
- [9] H. M. Blackburn, F. Marqués, and J. M. Lopez. Symmetry breaking of two-dimensional time-periodic wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 522 :395–411, 2005.
- [10] E. M. Bollt, A. Luttmann, S. Kramer, and R. Basnayake. Measurable dynamics analysis of transport in the Gulf of Mexico during the oil spill. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(03), 2012.
- [11] E. A. Burroughs, L. A. Romero, R. B. Lehoucq, and A. G. Salinger. Linear stability of flow in a differentially heated cavity via large-scale eigenvalue calculations. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 14(6) :803–822, 2004.
- [12] J. C. Butcher. Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 3(02) :185–201, 1963.
- [13] J. C. Butcher. Implicit Runge-Kutta processes. *Mathematics of Computation*, 18(85) :50–64, 1964.
- [14] M. Cencini. Dynamics of inertial particles and dynamical systems. [https ://www-n.oca.eu/Bec/www/clouds-turbulence/clouds_prog_files/Cencini.pdf](https://www-n.oca.eu/Bec/www/clouds-turbulence/clouds_prog_files/Cencini.pdf).
- [15] M. Cencini, F. Cecconi, and A. Vulpiani. *Chaos : From Simple Models to Complex Systems*. World Scientific, Singapore, 2009.
- [16] D. E. Cormack, L. G. Leal, and J. Imberger. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part 1. Asymptotic theory. *Journal of fluid Mechanics*, 65(02) :209–229, 1974.
- [17] H. Dang-Vu and C. Delcarte. *Bifurcations et chaos : Une introduction à la dynamique contemporaine*. Ellipses, Paris, 2000.

- [18] R. Deveswaran et al. Concepts and Techniques of Pharmaceutical Powder Mixing Process : A Current Update. *Research Journal of Pharmacy and Technology*, 2(2) :245–249, 2009.
- [19] M. Deville, L. Kleiser, and F. Montigny-Rannou. Pressure and time treatment for Chebyshev spectral solution of a Stokes problem. *International journal for numerical methods in fluids*, 4(12) :1149–1163, 1984.
- [20] F. L. Djanna Koffi. *Convection naturelle turbulente en cavité différentiellement chauffée à grands nombres de Rayleigh : caractérisation expérimentale des écoulements et des transferts thermiques, étude numérique du couplage convection-rayonnement*. Thèse de doctorat, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique-Poitiers, 2011.
- [21] E. R. G. Eckertf and W. O. Carlson. Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2(1) :106–120, 1961.
- [22] J.-P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of modern physics*, 57(3) :617, 1985.
- [23] J. W. Elder. Laminar free convection in a vertical slot. *Journal of Fluid Mechanics*, 23(01) :77–98, 1965.
- [24] U. Feudel, S. Kuznetsov, and A. Pikovsky. *Strange nonchaotic attractors*. World Scientific, Berkeley, 2006.
- [25] G. O. Fountain, D. V. Khakhar, I. Mezic, and J. M. Ottino. Chaotic mixing in a bounded three-dimensional flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 417, 2000.
- [26] B. Gebhart. Instability, transition, and turbulence in buoyancy-induced flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 5(1) :213–246, 1973.
- [27] A. Gelfgat, P. Z. Bar-Yoseph, and A. L. Yarin. Stability of multiple steady states of convection in laterally heated cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 388 :315–334, 1999.
- [28] A. E. Gill. The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 26(03) :515–536, 1966.
- [29] E. Gouillart, O. Dauchot, B. Dubrulle, S. Roux, and J.-L. Thiffeault. Slow decay of concentration variance due to no-slip walls in chaotic mixing. *Physical Review E*, 78, 2008.
- [30] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Attractors on an N -torus : Quasiperiodicity versus chaos. *Physica D*, 15(3) :354–373, 1985.
- [31] R. O. Grigoriev. *Mixing in Laminar Fluid Flows : From Microfluidics to Oceanic Currents*. Wiley Online Library, Singapore, 2012.
- [32] D. B. Haidvogel and T. Zang. The accurate solution of Poisson’s equation by expansion in Chebyshev polynomials. *Journal of Computational Physics*, 30(2) :167–180, 1979.
- [33] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric numerical integration*. Springer, Netherlands, 2005.
- [34] D. M. Imboden, U. Lemmin, T. Joller, and M. Schurter. Mixing processes in lakes : Mechanisms and ecological relevance. *Schweizerische Zeitschrift für Hydrologie*, 45(1) :11–44, 1983.
- [35] H. Ishida, S. Kawase, and H. Kimoto. The second largest Lyapunov exponent and transition to chaos of natural convection in a rectangular cavity. *International journal of Heat and Mass Transfer*, 49(25) :5035–5048, 2006.
- [36] R. J. A. Janssen and R. A. W. M. Henkes. Influence of Prandtl number on instability mechanisms and transition in a differentially heated square cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 290 :319–344, 1995.
- [37] F. Jiang, K. S. Drese, S. Hardt, M. Küpper, and F. Schönfeld. Helical flows and chaotic mixing in curved micro channels. *AIChE journal*, 50(9) :2297–2305, 2004.
- [38] R. Ketzmerick, G. Petschel, and T. Geisel. Slow decay of temporal correlations in quantum systems with Cantor spectra. *Physical review letters*, 69(5) :695, 1992.

- [39] L. Kleiser and U. Schumann. Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flows. In *Proceedings of the Third GAMM—Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, pages 165–173. Springer, Braunschweig, 1980.
- [40] S. K. Korovin and N. A. Izobov. On the Perron sign change effect for Lyapunov characteristic exponents of solutions of differential systems. *Differential Equations*, 46(10) :1395–1408, 2010.
- [41] N. V. Kuznetsov and G. A. Leonov. Stability by the first approximation for discrete systems. *Vestnik-St Petersburg University of Mathematics*, 36 :21–27, 2003.
- [42] Y. Kuznetsov. Saddle-node bifurcation for maps. http://www.scholarpedia.org/article/Saddle-node_bifurcation_for_maps, 2008.
- [43] Y. A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer, New York, 1998.
- [44] P. Le Quéré. *Etude de la transition à l’instationnarité des écoulements de convection naturelle en cavité verticale différentiellement chauffée par méthodes spectrales Chebyshev*. Thèse de doctorat, Poitiers, 1987.
- [45] P. Le Quéré and M. Behnia. From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 359 :81–107, 1998.
- [46] P. Le Quéré and T. A. de Roquefort. Transition to unsteady natural convection of air in vertical differentially heated cavities : influence of thermal boundary conditions on the horizontal walls. In *Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference, San Francisco*, 1986.
- [47] G. M. Lewis and W. Nagata. Double Hopf bifurcations in the differentially heated rotating annulus. *SIAM J. Appl. Math.*, 63(3) :1029–1055, 2003.
- [48] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2) :130–141, 1963.
- [49] P. Manneville. *Dynamique Non-linéaire Appliquée au Chaos et à son contrôle*. DEA de mécanique, DEA de Dynamique des Fluides et des Transferts, Paris VI, Paris-Sud, École polytechnique, 2004.
- [50] F. Marqués, J. M. Lopez, and H. M. Blackburn. Bifurcations in systems with \mathbb{Z}_2 spatio-temporal and $\mathbb{O}(2)$ spatial symmetry. *Physica D*, 189(3) :247–276, 2004.
- [51] F. Marqués, J. M. Lopez, and J. Shen. A periodically forced flow displaying symmetry breaking via a three-tori gluing bifurcation and two-tori resonances. *Physica D*, 156(1) :81–97, 2001.
- [52] N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel, and J. Kurths. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 438(5) :237–329, 2007.
- [53] I. Mercader, O. Batiste, L. Ramírez-Piscina, X. Ruiz, S. Rüdiger, and J. Casademunt. Bifurcations and chaos in single-roll natural convection with low Prandtl number. *Physics of Fluids*, 17(10) :104108, 2005.
- [54] I. Mercader, O. Batiste, and X. Ruiz. Quasi-periodicity and chaos in a differentially heated cavity. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 18(2-4) :221–229, 2004.
- [55] S. Mergui. *Caractérisation expérimentale des écoulements d’air de convection naturelle et mixte dans une cavité fermée*. Thèse de doctorat, Poitiers, 1993.
- [56] K. Mizumukai, T. Sato, S. Tabeta, and D. Kitazawa. Numerical studies on ecological effects of artificial mixing of surface and bottom waters in density stratification in semi-enclosed bay and open sea. *Ecological Modelling*, 214(2) :251–270, 2008.
- [57] S. Newhouse, D. Ruelle, and F. Takens. Occurrence of strange Axiom A attractors near quasi periodic flows on T^m , $m \geq 3$. *Communications in Mathematical Physics*, 64(1) :35–40, 1978.
- [58] J.-P. Nougier. *Méthodes de calcul numérique*. Hermès-Lavoisier, Michigan, 2001.
- [59] L. Oteski, Y. Duguet, and L. R. Pastur. Lagrangian chaos in confined two-dimensional oscillatory convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 759 :489–519, 2014.

- [60] J. M. Ottino. *The kinematics of mixing : stretching, chaos and transport*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [61] H. Ozoe, H. Sayama, and S. W. Churchill. Natural convection in an inclined rectangular channel at various aspect ratios and angles—experimental measurements. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18(12) :1425–1431, 1975.
- [62] S. Paolucci and D. R. Chenoweth. Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 201 :379–410, 1989.
- [63] J. Patterson and J. Imberger. Unsteady natural convection in a rectangular cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 100(01) :65–86, 1980.
- [64] G. A. Pavliotis and A. M. Stuart. Periodic homogenization for inertial particles. *Physica D*, 204(3) :161–187, 2005.
- [65] O. Perron. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, 32(1) :703–728, 1930.
- [66] A. Pikovsky and O. Popovych. Persistent patterns in deterministic mixing flows. *Europhysics Letters*, 61 :625–631, 2003.
- [67] L. J. Pratta, I. I. Rypina, T. M. Özgökmen, P. Wang, H. Childs, and H. Bebieva. Chaotic advection in a steady, three-dimensional, Ekman-driven eddy. *Journal of Fluid Mechanics*, 738 :143–183.
- [68] V. Rom-Kedar, A. Leonard, and S. Wiggins. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 214 :347–394, 1990.
- [69] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Communications in mathematical physics*, 20(3) :167–192, 1971.
- [70] L. Scardovi, A. Sarlette, and R. Sepulchre. Synchronization and balancing on the N -torus. *Systems & Control letters*, 56(5) :335–341, 2007.
- [71] S. K. Sia and G. M. Whitesides. Microfluidic devices fabricated in poly (dimethylsiloxane) for biological studies. *Electrophoresis*, 24(21) :3563–3576, 2003.
- [72] S. A. Thorpe. On standing internal gravity waves of finite amplitude. *Journal of Fluid Mechanics*, 32 :489–528, 1968.
- [73] J. F. Torres, D. Henry, A. Komiya, and S. Maruyama. Bifurcation analysis of steady natural convection in a tilted cubical cavity with adiabatic sidewalls. *Journal of Fluid Mechanics*, 756 :650–688, 2014.
- [74] D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics*, volume 1. Oxford, Clarendon Press, Suffolk, 1988.
- [75] L. Tuckerman. Dynamique Non-Linéaire, Hamiltonian Systems. <http://www.pmmh.espci.fr/laurette/class/Hamiltonian.pdf>, 2011.
- [76] D. Viswanath. Symbolic dynamics and periodic orbits of the Lorenz attractor. *Nonlinearity*, 16(3) :1035, 2003.
- [77] C. L. Webber and J. P. Zbilut. Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies. *Journal of applied physiology*, 76(2) :965–973, 1994.
- [78] S. Wiggins and J. M. Ottino. Foundations of chaotic mixing. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 362(1818) :937–970, 2004.
- [79] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16(3) :285–317, 1985.
- [80] S. Xin. *Simulations Numériques de Convection Naturelle Turbulente*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1993.
- [81] S. Xin and P. Le Quére. Direct numerical simulations of two-dimensional chaotic natural convection in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Journal of Fluid Mechanics*, 304 :87–118, 1995.

- [82] S. Xin and P. Le Quéré. Natural-convection flows in air-filled, differentially heated cavities with adiabatic horizontal walls. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 50(5) :437–466, 2006.
- [83] S. Xin and P. Le Quéré. Stability of two-dimensional ($2D$) natural convection flows in air-filled differentially heated cavities : $2D/3D$ disturbances. *Fluid Dynamics Research*, 44(3) :031419, 2014.
- [84] H. Yoshida. Recent progress in the theory and application of symplectic integrators. In *Qualitative and Quantitative Behaviour of Planetary Systems*, pages 27–43. Kluwer, Netherlands, 1993.

Annexes partie Eulérienne

A.1 Méthodes numériques

Nous explicitons dans ce paragraphe quelques points des méthodes numériques utilisées par le code DNS écrit par S. Xin et P. Le Quéré. Le détail complet de ces méthodes est donné en annexe du document [80].

A.1.1 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle des équations se fait par le biais d'un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2. Ce schéma numérique consiste à rendre implicite la résolution des termes diffusifs tandis que les termes convectifs sont résolus explicitement. Appliqué à :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (V \cdot \nabla)f = \nabla^2 f, \quad (\text{A.1})$$

ce schéma temporel s'exprime :

$$\frac{3f^{n+1} - 4f^n + f^{n-1}}{2\Delta t} + 2(V \cdot \nabla f)^n - (V \cdot \nabla f)^{n-1} = \nabla^2 f^{n+1},$$

où n indique le temps discrétisé auquel est résolue l'équation (A.1). Ce schéma peut être mis sous la forme d'un problème de Helmholtz :

$$\nabla^2 f^{n+1} - \lambda f^{n+1} = S_f, \quad (\text{A.2})$$

avec $\lambda = \frac{3}{2\Delta t}$ et $S_f = \left(\frac{-2f}{\Delta t} + 2V \cdot \nabla f \right)^n + \left(\frac{f}{2\Delta t} - V \cdot \nabla f \right)^{n-1}$ les termes sources du problème.

L'équation (A.2) pour f^{n+1} est résolue par l'algorithme proposé par Haidvogel et Zang [32].

A.1.2 Discrétisation spatiale

Soient N_x et N_z le nombre de points considérés pour la discrétisation spatiale suivant les directions x et z , respectivement. La discrétisation spatiale des équations du problème est réalisée par une méthode spectrale de Galerkin basée sur une décomposition en polynômes de Chebyshev. Tout champ $f(x, z, t) \in \mathcal{R}$ est décomposé comme :

$$f(x, z, t) = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_z} f_{i,j}(t) T_i(2Ax - 1) T_j(2z - 1), \quad (\text{A.3})$$

où $T_n(x) = \cos(n \times \arccos(x))$ et A le rapport d'aspect de la cavité. $f_{i,j}(t) \in \mathcal{R}$ sont les coefficients spectraux de f , définis par :

$$f_{i,j}(t) = \frac{4}{c_i N_x c_j N_z} \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_z} \frac{1}{c_k c_l} f(x_k, z_l, t) T_i(2Ax_k - 1) T_j(2z_l - 1), \quad (\text{A.4})$$

où :

$$x_k = \frac{1}{2A} \left(1 - \cos \left(\frac{k\pi}{N_x} \right) \right), \quad (\text{A.5})$$

et :

$$z_l = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{l\pi}{N_z} \right) \right), \quad (\text{A.6})$$

sont les points de collocation et $c_0 = c_{N_x} = c_{N_z} = 2$, $c_n = 1$ pour $0 < n < N_x$ ou $0 < n < N_z$.

Le traitement de l'incompressibilité des équations de Navier-Stokes à chaque pas de temps est assuré par la méthode des matrices d'influence ([39], [19], [44]).

A.2 Calcul des exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov quantifient les taux d'amplification, moyennés dans le temps, d'une perturbation initiale au voisinage d'une trajectoire du système. Ils sont évalués en calculant la norme de l'écartement de deux trajectoires, l'une étant qualifiée de trajectoire de référence, l'autre correspondant à une trajectoire linéarisée autour de l'état de référence, auquel est ajouté une perturbation dont l'évolution est laissée libre dans le temps. Le plus grand exposant de Lyapunov est défini par :

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|\delta X(t)\|}{\|\delta X_0\|} \right), \quad (\text{A.7})$$

avec $\|\delta X\|$ la distance entre les deux trajectoires et $\|\delta X_0\|$ la norme initiale de la perturbation. Le plus grand exposant de Lyapunov peut être :

1. positif. Il traduit une amplification exponentielle de la perturbation. La dynamique de référence est dite instable,
2. nul, en ce cas la perturbation n'est ni amplifiée, ni amortie de façon exponentielle dans le temps. La dynamique de référence est dite marginalement stable,
3. négatif. Il traduit alors une perturbation exponentiellement amortie dans le temps. La dynamique de référence est dite stable.

À chaque axe propre du tenseur de Cauchy-Green est associé un exposant de Lyapunov. Le spectre complet de ces exposants, nommés λ peut donc être obtenu en perturbant le système considéré suivant chacune de ses directions propres. L'évolution de ces perturbations traduit alors la déformation d'un n -parallélépipède, n étant la dimension du système (voir Fig. A.1). Dans le cas de systèmes aux dérivées partielles, perturber une trajectoire suivant chacun de ses axes propres revient à créer $n \rightarrow \infty$ trajectoires perturbées. La résolution d'un tel problème numérique est impossible, ou, dans le cas où n est petit, très coûteuse. C'est pourquoi nous ne nous intéressons ici qu'aux directions propres dominantes. Supposons en effet qu'une des directions propres soit la plus instable, alors pour $t \rightarrow \infty$, cette direction domine toutes les autres. Il n'est donc pas nécessaire de connaître toutes les directions propres de la dynamique, les principales suffisant à quantifier sa stabilité.

Une note d'attention est nécessaire : ce n'est pas parce qu'un exposant de Lyapunov est négatif/positif qu'il indique nécessairement une direction contractante ou dilatante. En 1930, Perron [65] a montré que certains systèmes pouvaient posséder un exposant de Lyapunov positif sans pour autant être chaotiques, et, de même, que des exposants de Lyapunov négatifs n'indiquaient pas nécessairement une propriété stable de la dynamique. Cet effet, connu sous le nom de l'effet Perron montre que la seule valeur d'un exposant de Lyapunov ne peut être considérée comme un critère suffisant pour prouver le caractère stable/instable ou chaotique d'une dynamique [40], [41]. C'est pourquoi nous utilisons les exposants de Lyapunov conjointement à d'autres observables (tels que les portraits de phase, spectres de puissance, sections de Poincaré, ...) afin de caractériser les régimes de l'écoulement de cavité différentiellement chauffée 2D répertoriés au chapitre 4.

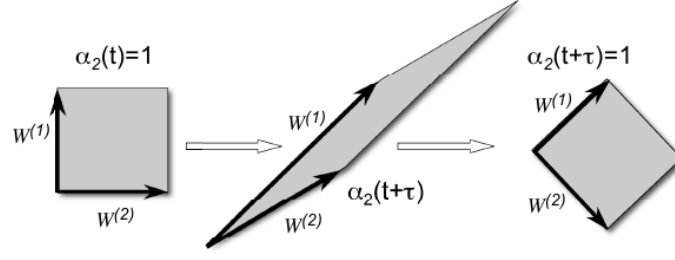


FIGURE A.1 – Schéma de la déformation d'un parallélogramme défini suivant les axes propres de la dynamique. Gauche : parallélogramme initial, centre : parallélogramme déformé par le flot, droite : parallélogramme renormalisé. Image extraite de [15]. ([Retour au texte](#))

A.2.1 Étalonnage : cas du système de Lorenz

Le système de Lorenz consiste en une modélisation simplifiée d'un problème de convection de Rayleigh-Bénard. Ce système fait intervenir trois paramètres ρ , σ et β représentant respectivement le nombre de Rayleigh, le nombre de Prandtl et une constante du problème. Ce système s'exprime comme [48] :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

et fait partie, suivant les valeurs des trois paramètres, des systèmes chaotiques continus les plus simples. Il s'inscrit donc comme un cas test idéal pour toute caractérisation de dynamiques chaotiques.

La matrice jacobienne du système est :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (r - z) & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

et sa trace définit la divergence du champ de vecteur correspondant, soit, dans ce cas, les exposants de Lyapunov [15] :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(\mathcal{J}) = -(\sigma + 1 + \beta). \quad (\text{A.10})$$

Puisque le système possède une direction neutre (un exposant de Lyapunov nul suivant la direction du flot), et que les différentes valeurs de λ_i sont ordonnées par ordre croissant, nous obtenons la relation $\lambda_3 = -(\sigma + 1 + \beta) - \lambda_1$. Ce résultat nous permet de définir une valeur comparative attendue pour la valeur de λ_3 une fois λ_1 évalué.

A.2.2 Algorithme de calcul

Soit (x, y, z) une solution du système de Lorenz. Nous nous intéressons ici à la stabilité de cette solution. Introduisons (x_p, y_p, z_p) une perturbation à la solution (x, y, z) . Le système linéarisé en perturbation est :

$$\begin{cases} \frac{dx_p(t)}{dt} = \sigma(y_p(t) - x_p(t)) \\ \frac{dy_p(t)}{dt} = \rho x_p(t) - y_p(t) - (x_p(t)z(t) + x(t)z_p(t)) \\ \frac{dz_p(t)}{dt} = x_p(t)y(t) + x(t)y_p(t) - \beta z_p(t) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Les exposants de Lyapunov sont calculés en créant 3 perturbations initiales orthogonales les unes aux autres. Cette orthogonalisation est réalisée par l'algorithme de Gram-Schmidt [17], [35]. Soit \mathbf{x}_{pi} la i^{eme} trajectoire perturbée, alors :

$$\mathbf{x}_{pi}^\perp = \mathbf{x}_{pi} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\mathbf{x}_{pi} \cdot \mathbf{x}_{pj}^\perp) \mathbf{x}_{pj}^\perp}{\mathbf{x}_{pj}^\perp \cdot \mathbf{x}_{pj}^\perp}. \quad (\text{A.12})$$

Wolf *et al* [79] ont proposé un algorithme pour le calcul des λ_i . Soit Δt le pas de temps d'intégration,

1. Propager la solution du système $\mathbf{x}(t)$ et les perturbations $\mathbf{x}_{pi}(t)$ de t à $t + \Delta t$ respectivement par (A.8) et (A.11). Incrémenter un compteur $N = N + 1$ représentant le nombre d'itérations réalisées.
2. Orthogonaliser les perturbations via (A.12),
3. Évaluer la norme $\delta x_{pi}(t + \Delta t) = (\mathbf{x}_{pi}^\perp(t + \Delta t) \cdot \mathbf{x}_{pi}^\perp(t + \Delta t))^{1/2}$ de chacune des perturbations. Le taux d'amplification cumulé de la i^{eme} direction propre de la dynamique est alors $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i + \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\delta x_{pi}(t + \Delta t)}{\delta x_{pi}(t)} \right)$. Le i^{eme} exposant de Lyapunov est évalué par : $\lambda_i = \bar{\lambda}_i / N$.
4. Normaliser \mathbf{x}_{pi} : $\mathbf{x}_{pi}(t + \Delta t) = \frac{\mathbf{x}_{pi}^\perp(t + \Delta t)}{\delta x_{pi}(t + \Delta t)}$.

Une variation de cet algorithme évitant la renormalisation des perturbations à chaque pas de temps est possible en introduisant une valeur seuil ε_R et en modifiant l'étape 4 par : *Si n'importe quel $\mathbf{x}_{pi}(t + \Delta t) > \varepsilon_R$ ou $\mathbf{x}_{pi}(t + \Delta t) < 1/\varepsilon_R$, alors $\mathbf{x}_{pi}(t + \Delta t) = \frac{\mathbf{x}_{pi}^\perp(t + \Delta t)}{\delta x_{pi}(t + \Delta t)}$, $\mathbf{x}_{pi}(t + \Delta t) = \mathbf{x}_{pi}^\perp(t + \Delta t)$ sinon.*

Ces deux algorithmes ont été étalonnés sur plusieurs cas tests :

1. Le premier cas test consiste à faire varier le pas de temps entre chaque orthogonalisation des \mathbf{x}_{pi} . Ce pas de temps est noté Δt_\perp par la suite.
2. Le second cas test consiste à faire varier le critère seuil ε_R .
3. Le troisième test vise à connaître l'influence de Δt sur l'évaluation des exposants de Lyapunov.
4. Partant de l'idée qu'un exposant de Lyapunov nul se traduit par un taux d'amplification $\delta x(t + \Delta t_\perp) / \delta x(t)$ oscillant autour de 1, nous pouvons évaluer l'exposant de Lyapunov en comparant les normes non plus à chaque Δt_\perp , mais τ_λ plus tard : $\delta x(t + \tau_\lambda) / \delta x(t)$. Le quatrième test considère un seuil ε_R propre à chaque trajectoire et un temps τ_λ variable.

Nos résultats sont présentés dans les tables A.1 et A.2. Le premier cas est celui réalisé par Wolf *et al* [79]. Le second cas est celui de l'attracteur historique [48].

De ces 4 cas test, nous déduisons que :

1. L'orthonormalisation à chaque Δt_\perp n'est pas optimale pour déterminer les valeurs de λ_i proches de zéro ;
2. L'orthogonalisation n'est pas nécessaire à chaque pas de temps ;
3. Le seuil ε_R ne doit être "ni trop petit, ni trop grand". Une valeur autour de 10^2 , 10^3 semble idéale ;
4. Plus le pas de temps d'intégration Δt est petit, meilleures sont les estimations de λ_i ;

5. L'utilisation de seuils ε_R propre à chaque trajectoire donne de meilleures estimations des λ_i autour de zéro ;
6. Il existe un temps τ_λ optimal pour l'évaluation des exposants de Lyapunov nuls.

A.2.3 Linéarisation des équations de Navier-Stokes

L'algorithme de calcul des exposants de Lyapunov présenté au §A.2.2 est appliqué dans le cas de l'écoulement de cavité différentiellement chauffée $2D$. Soit une trajectoire perturbée $(\mathbf{U}_T, \Theta_T, P_T)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_T &= \mathbf{U}_p + \mathbf{U} \\ \Theta_T &= \Theta_p + \Theta \\ P_T &= P_p + P \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

avec (\mathbf{U}, Θ, P) une trajectoire instationnaire de référence et $(\mathbf{U}_p, \Theta_p, P_p)$ une perturbation. Les équations de Navier-Stokes deviennent alors :

$$\begin{cases} \partial_t(\mathbf{U}_p + \mathbf{U}) + [(\mathbf{U}_p + \mathbf{U}) \cdot \nabla](\mathbf{U}_p + \mathbf{U}) &= Pr[-\nabla(P_p + P) + Ra^{-1/2}\nabla^2(\mathbf{U}_p + \mathbf{U})] + (\Theta_p + \Theta)\mathbf{e}_z \\ \partial_t(\Theta_p + \Theta) + [(\mathbf{U}_p + \mathbf{U}) \cdot \nabla](\Theta_p + \Theta) &= Ra^{-1/2}\nabla^2(\Theta_p + \Theta) \\ \nabla \cdot (\mathbf{U}_p + \mathbf{U}) &= 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

En utilisant les égalités (2.21) et en négligeant les termes d'ordre 2 en perturbation, nous obtenons les équations linéarisées de l'évolution de la perturbation :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_p + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}_p + (\mathbf{U}_p \cdot \nabla) \mathbf{U} &= Pr(-\nabla P_p + Ra^{-1/2}\nabla^2 \mathbf{U}_p) + \Theta_p \mathbf{e}_z \\ \partial_t \Theta_p + (\mathbf{U}_p \cdot \nabla) \Theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta_p &= Ra^{-1/2}\nabla^2 \Theta_p \\ \nabla \cdot \mathbf{U}_p &= 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

A.2.4 Initialisation et renormalisation

Soient :

$$U_S = (\mathbf{U}_p \cdot \mathbf{U}_p)^{1/2} \quad (\text{A.16})$$

et

$$\Theta_S = |\Theta_p|. \quad (\text{A.17})$$

La norme de l'écart entre la trajectoire de référence et la trajectoire perturbée est définie comme :

$$\|\delta X(t)\| = \sqrt{U_S^2 + \Theta_S^2}. \quad (\text{A.18})$$

La direction initiale de la perturbation $(\mathbf{U}_p(\mathbf{X}, t_0), \Theta_p(\mathbf{X}, t_0))$ choisie orthogonale au flot de la solution de référence $(\mathbf{U}(\mathbf{X}, t_0) - \mathbf{U}(\mathbf{X}, t_0 - \delta t), \Theta(\mathbf{X}, t_0) - \Theta(\mathbf{X}, t_0 - \delta t))$ avec t_0 l'instant initial de la perturbation.

À $t = t_0$, La trajectoire perturbée est alors définie comme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_T(\mathbf{X}, t) \\ \Theta_T(\mathbf{X}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \\ \Theta(\mathbf{X}, t) \end{pmatrix} + \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p(\mathbf{X}, t)/U_S \\ \Theta_p(\mathbf{X}, t)/\Theta_S \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

où ε_0 correspond à la norme initiale de la perturbation.

La trajectoire perturbée est renormalisée si (voir fig. A.2) : $U_S > \varepsilon_M$ ou $U_S < \varepsilon_m$ ou $\Theta_S > \varepsilon_M$ ou $\Theta_S < \varepsilon_m$, avec ε_M et ε_m correspondant à deux nombres arbitraires vérifiant la condition $\varepsilon_M > \varepsilon_0 > \varepsilon_m > 0$ (dans notre cas $\varepsilon_M = 10^2$ et $\varepsilon_m = 10^{-7}$). La renormalisation est calculée par (A.19)

La perturbation initiale étant arbitrairement définie, il n'est pas attendu qu'à la première initialisation la trajectoire perturbée soit alignée avec la direction propre la plus instable du problème.

Type de test	Δt	t_{\max}	Wolf	ε_R	Δt_{\perp}	λ_1	λ_2	λ_3	CV_{λ_3}
Δt_{\perp} , Wolf	10^{-3}	10^3	T	0	Δt	1.497	0.031	-22.428	0.069
Δt_{\perp} , Wolf	10^{-3}	10^3	T	0	$10\Delta t$	1.497	0.326	-21.679	0.81
Δt_{\perp} , Wolf	10^{-3}	10^3	T	0	$100\Delta t$	1.497	2.462	-9.114	13.38
Δt_{\perp} , Wolf	10^{-3}	10^3	T	0	$10^3\Delta t$	1.497	1.824	0.132	22.629
Δt_{\perp}	10^{-3}	10^3	F	10^3	Δt	1.494	-0.0033	-22.478	0.016
Δt_{\perp}	10^{-3}	10^3	F	10^3	$10\Delta t$	1.445	-0.0068	-22.42	0.029
Δt_{\perp}	10^{-3}	10^3	F	10^3	$100\Delta t$	0.244	-0.505	-14.18	7.07
Δt_{\perp}	10^{-3}	10^3	F	10^3	$10^3\Delta t$	1.272	-0.074	-0.31	21.96
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^1	Δt	1.484	-0.004	-22.48	0.004
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	1.491	-0.0028	-22.49	0.0032
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^3	Δt	1.494	-0.0033	-22.48	0.016
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^4	Δt	1.497	-0.0035	-22.40	0.099
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^5	Δt	1.497	-0.0031	-15.73	6.77
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^6	Δt	1.493	-0.0009	-8.58	13.91
Δt Wolf	10^{-2}	10^3	T	0	Δt	1.657	0.17	-21.68	0.976
Δt Wolf	10^{-2}	10^4	T	0	Δt	1.66	0.16	-21.68	0.979
Δt Wolf	10^{-4}	10^3	T	0	Δt	1.50	0.003	-22.49	0.007
Δt Wolf	10^{-4}	10^2	T	0	Δt	1.43	3.3×10^{-4}	-22.42	0.009
Δt Wolf	10^{-5}	10^1	T	0	Δt	0.667	-0.018	-21.648	0.019
Δt Wolf	10^{-5}	10^2	T	0	Δt	1.411	0.0071	-22.417	0.0062
Δt	10^{-2}	10^3	F	10^2	Δt	1.404	0.044	-18.53	3.876
Δt	10^{-2}	10^4	F	10^2	Δt	1.397	0.058	-18.48	3.92
Δt	10^{-4}	10^3	F	10^2	Δt	1.497	-4.4×10^{-4}	-22.497	4.1×10^{-4}
Δt	10^{-4}	10^2	F	10^2	Δt	1.432	-3.2×10^{-4}	-22.428	3.3×10^{-3}
Δt	10^{-5}	10^1	F	10^2	Δt	0.667	-0.019	-21.648	0.019
Δt	10^{-5}	10^2	F	10^2	Δt	1.411	0.0068	-22.418	0.0068
$\tau_{\lambda} = \Delta t_{\perp}, I\varepsilon_R$	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	1.495	-0.0015	-22.479	0.016
$\tau_{\lambda} = 10^1\Delta t_{\perp}, I\varepsilon_R$	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	1.495	-1.4×10^{-3}	-22.479	0.016
$\tau_{\lambda} = 10^2\Delta t_{\perp}, I\varepsilon_R$	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	1.495	2.4×10^{-4}	-22.479	0.016
$\tau_{\lambda} = 10^3\Delta t_{\perp}, I\varepsilon_R$	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	1.495	2.3×10^{-3}	-22.479	0.016
$\tau_{\lambda} = 10^4\Delta t_{\perp}, I\varepsilon_R$	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	1.495	1.5×10^{-3}	-22.479	0.016

TABLE A.1 – Calcul des trois plus grands exposants de Lyapunov pour le système de Lorenz avec $\beta = 4$, $\sigma = 16$, $\rho = 45.92$. La convergence de λ_3 (CV_{λ_3}) est évaluée par : $CV_{\lambda_3} = |\lambda_3 - \lambda_3^{th}|$ où $\lambda_3^{th} = -(\beta - \sigma - 1) - \lambda_1$. Δt correspond au pas de temps du système, Δt_{\perp} au pas de temps de la ré-orthogonalisation des trajectoires perturbées, "Wolf" à la renormalisation à chaque pas de temps Δt (valeur T pour vrai, F pour faux). t_{\max} indique le nombre d'unités de temps réalisées pour une simulation, ε_R la norme maximale autorisée pour les trajectoires perturbées. Sauf dans les cas $I\varepsilon_R$, toutes les trajectoires perturbées sont renormalisées si la norme de l'une d'entre elle, évaluée à chaque pas de temps Δt_{\perp} est plus grande que ε_R ou plus petite que $1/\varepsilon_R$. Les exposants de Lyapunov sont évalués à chaque Δt_{\perp} puis moyennés ensuite. Dans le cas où τ_{λ} est indiqué, il n'est utilisé que pour fournir une meilleure estimation de λ_2 . ([Retour au texte](#))

Type de test	Δt	t_{\max}	Wolf	ε_R	Δt_{\perp}	λ_1	λ_2	λ_3	CV_{λ_3}
Δt_{\perp} , Wolf	10^{-3}	10^3	T	0	Δt	0.892	0.012	-14.53	0.027
Δt_{\perp} , Wolf	10^{-3}	10^3	T	0	$10\Delta t$	0.892	0.13	-14.26	0.3
Δt_{\perp} , Wolf	10^{-3}	10^3	T	0	$100\Delta t$	0.892	1.20	-8.70	5.9
Δt_{\perp}	10^{-3}	10^3	F	10^3	Δt	0.890	-0.0012	-14.55	0.0022
Δt_{\perp}	10^{-3}	10^3	F	10^3	$10\Delta t$	0.871	-0.0019	-14.54	0.0012
Δt_{\perp}	10^{-3}	10^3	F	10^3	$100\Delta t$	0.09	-0.20	-12.08	1.68
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^1	Δt	0.886	-0.002	-14.55	0.0016
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	0.890	-0.001	-14.55	0.0016
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^3	Δt	0.890	-0.0012	-14.55	0.0022
ε_R	10^{-3}	10^3	F	10^4	Δt	0.891	-0.0014	-14.52	0.030
$\tau = \Delta t_{\perp}$, $I\varepsilon_R$	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	0.891	-0.0011	-14.55	0.0026
$\tau_{\lambda} = 10^1 \Delta t_{\perp}$, $I\varepsilon_R$	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	0.891	-0.0011	-14.55	0.0026
$\tau_{\lambda} = 10^2 \Delta t_{\perp}$, $I\varepsilon_R$	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	0.891	-7×10^{-5}	-14.55	0.0026
$\tau_{\lambda} = 10^3 \Delta t_{\perp}$, $I\varepsilon_R$	10^{-3}	10^3	F	10^2	Δt	0.891	0.0027	-14.55	0.0026

TABLE A.2 – Cas du système de Lorenz historique avec $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$. La correspondance des différents paramètres est donnée en table A.1. ([Retour au texte](#))

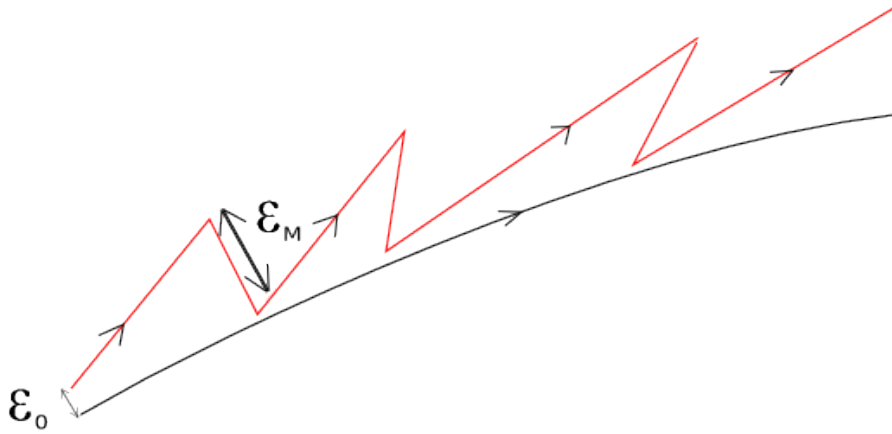


FIGURE A.2 – Schéma de la renormalisation associée à la trajectoire perturbée (rouge) : la trajectoire est renormalisée si la norme de l'écartement entre les trajectoires de référence (noir) et perturbée (rouge) est supérieure à ε_M . Chacune des renormalisations se fait avec une séparation initiale ε_0 suivant la direction au moment de la renormalisation, permettant à la trajectoire perturbée de s'aligner avec la direction la plus instable. ([Retour au texte](#))

C'est pourquoi nous considérons un temps d'adaptation (non comptabilisé dans le calcul des exposants de Lyapunov) comprenant 10 ré-initialisations de $(\mathbf{U}_T(\mathbf{X}, t_0), \Theta_T(\mathbf{X}, t_0))$ conformément à l'équation (A.19), chacune d'entre elles est calculée sur $50 \times 10^3 \Delta t$ (soit un temps total de $500 \times 10^3 \Delta t$).

A.2.5 Exposants nuls

La valeur $\lambda_i = 0$ est la plus difficile à déterminer numériquement. Nous avons vu au §A.2.2 que l'estimation d'une valeur $\lambda_i = 0$ à chaque Δt_\perp n'était pas celle donnant les meilleurs résultats. Nous proposons ici une méthode basée sur l'identification graphique des signaux des normes. Cette méthode est illustrée sur le cas d'un calcul des trois premiers exposants de Lyapunov sur un régime T^1 pour l'écoulement de cavité différentiellement chauffée décrite au chapitre 2. L'évolution des trois normes $\|\delta X_i\|$ est montrée sur la Fig. A.3.

La dynamique T^1 de l'écoulement est une dynamique périodique de période $\simeq 22$ unités de temps. Cette périodicité se retrouve sur l'évolution des normes $\|\delta X\|$. Pour mieux estimer $\lambda_1 = 0$, il est donc naturel de considérer un temps de comparaison des amplifications $\tau_\lambda = 22$ unités de temps ($\tau_\lambda = 22000 \Delta t_\perp$). La variation du calcul de $\lambda_i = f(\tau_\lambda)$ est montrée sur la figure A.3b. Nous y observons que la pire estimation de $\lambda_1 = 0$ est obtenue pour $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. Les exposants λ_2 et λ_3 n'étant que peu sensibles à la variation de τ_λ , il convient donc de prendre τ_λ comme une échelle de temps représentative de la dynamique étudiée. C'est pourquoi τ_λ est systématiquement choisi comme la valeur de la période dominante (voir §A.3) propre à chacune des dynamiques pour lesquelles les exposants de Lyapunov ont été calculés.

L'utilisation du raffinement proposé ci-dessus n'est pas suffisant pour assurer la convergence autour d'une valeur $\lambda_i = 0$. Nous voyons en effet sur la figure A.3c que pour les temps d'observation t_{\max} élevés, la valeur de λ se met à osciller autour de zéro, alternativement de façon positive (courbe rouge) et négative (courbe verte). En revenant sur la figure A.3b, nous pouvons définir notre valeur seuil de $\lambda_i = 0$ à partir de $\tau_\lambda = \Delta t_\perp = 10^{-3}$. Pour cette valeur de τ_λ , $\lambda_1 \simeq 5 \times 10^{-4}$. Cette valeur est prise comme le seuil à partir duquel l'exposant de Lyapunov *peut être considéré nul*. Nous y rajoutons la condition qu'à temps long, le signe de λ doit idéalement alternativement s'inverser, conformément à nos observations de la figure A.3c.

Dans le cas où ces deux critères seraient insuffisants, la visualisation de l'évolution des normes est utilisée pour trancher sur le signe de l'exposant calculé.

A.2.6 Convergence des estimations d'exposants non nuls

La convergence des estimations de $\lambda_i \neq 0$ est évaluée de façon graphique par rapport aux oscillations réalisées autour de la valeur moyenne de l'exposant estimé. Lorsque ces oscillations sont suffisamment amorties, nous considérons que l'exposant estimé est convergé (voir Fig. A.3d).

Les valeurs des λ_i sont données avec une barre d'erreur :

$$e_{\lambda_i} = \frac{1}{2} \left[\max_{t \in t^*}(\lambda_i(t)) - \min_{t \in t^*}(\lambda_i(t)) \right], \quad (\text{A.20})$$

définie sur $t \in t^*$, avec $t^*[t_{\max} - 100, t_{\max}]$. λ_i est estimé comme :

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left[\max_{t \in t^*}(\lambda_i(t)) + \min_{t \in t^*}(\lambda_i(t)) \right] \pm e_{\lambda_i}. \quad (\text{A.21})$$

Les valeurs $\lambda_i \neq 0$ sont considérées convergées si $e_{\lambda_i}/\lambda_i < 10\%$.

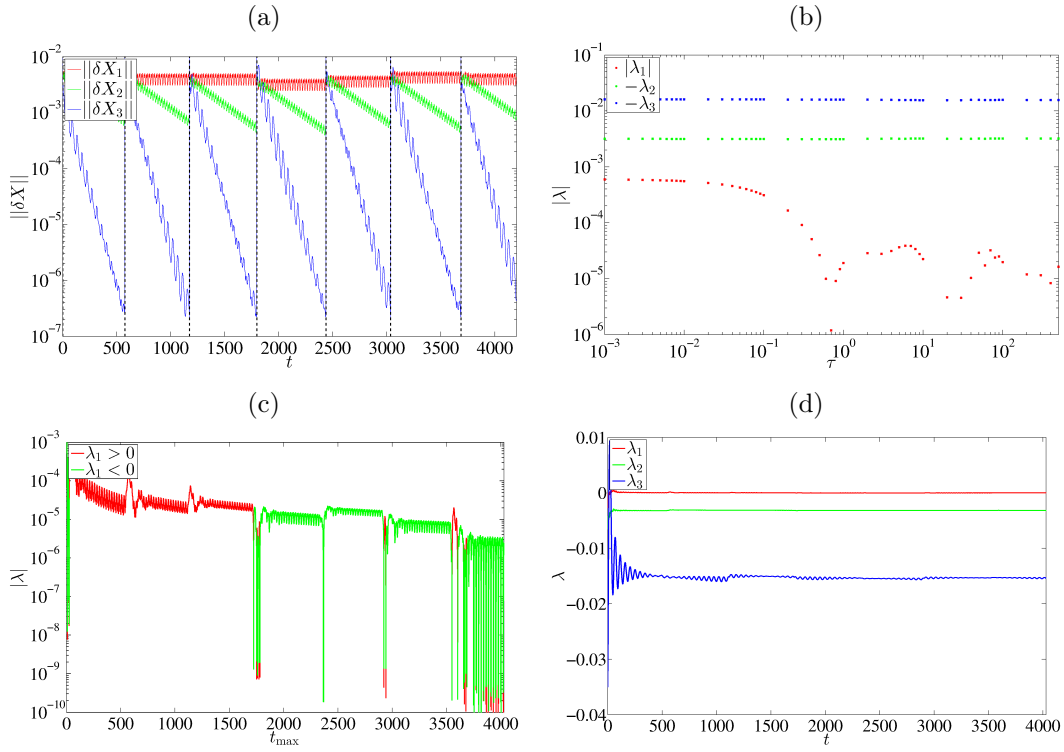


FIGURE A.3 – (a) Évolution des normes $\|\delta X\|$ associées à λ_1 (rouge), λ_2 (vert), λ_3 (bleue). Les pointillés noirs signalent une renormalisation de chacune des trajectoires perturbées. (b) Valeur absolue des exposants de Lyapunov en fonction de τ_λ sur la dynamique T^1 (voir §2.7) pour $Ra = 1.8 \times 10^8$. Dans le cas présenté ici, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$ et $\lambda_3 < 0$. (c) Signe de λ_1 en fonction du temps maximal de simulation t_{\max} à $\tau_\lambda = 22$. Les valeurs de λ_1 négatives sont représentées en vert, les positives en rouge. (d) Estimations des exposants de Lyapunov en fonction de t_{\max} . À $t = t_{\max}$, $\lambda_1 = -1.49 \times 10^{-6} \pm 1.9 \times 10^{-6}$ (rouge), $\lambda_2 = -3.16 \times 10^{-3} \pm 2.2 \times 10^{-6}$ (vert) et $\lambda_3 = -1.54 \times 10^{-2} \pm 1.2 \times 10^{-4}$ (bleu) pour $\tau_\lambda = 22$. ([Retour au texte](#))

A.2.7 Les exposants de Lyapunov pour l'écoulement de cavité différentiellement chauffée 2D

Ce paragraphe regroupe l'ensemble des valeurs numériques de l'estimation des exposants de Lyapunov des chapitres 2 et 4. Les résultats sont regroupés dans le tableau A.3.

A.3 Pulsation dominante (ω_e)

Ce paragraphe propose un algorithme pour calculer la fréquence dominante d'une dynamique quasi-périodique.

Un tore à n fréquences peut être représenté comme la combinaison de n cercles [70], se fermant à n fréquences incommensurables différentes. Si ces fréquences sont suffisamment distinguées les unes des autres, alors la fréquence dominante décrit le 'cercle de base' autour duquel évolue la dynamique toroïdale (voir fig. A.4a, cercle bleu). Nous nommons par la suite cette pulsation ω_e , et la supposons suffisamment éloignée de toute autre pulsation associée à l'un des cercles composant le tore.

L'estimation de cette pulsation joue le rôle d'un critère primordial afin de connaître l'origine des dynamiques de notre étude et afin d'obtenir une échelle de temps τ_λ naturelle pour le calcul des exposants de Lyapunov.

L'estimation de cette pulsation à partir des spectres en puissance d'une des observables du système est, dans la plupart des cas, complexe voir irréalisable (voir Figs. A.4). C'est pourquoi nous proposons ici une méthode basée sur des constats géométriques afin d'obtenir la meilleure estimation possible des pulsations ω_e .

La méthode proposée consiste à définir une section stroboscopique du signal à partir d'un jeu de n observables évoluant dans le temps. La section stroboscopique est alors de dimension n . Il apparaît que si la période associée au stroboscope est mal choisie, alors les points associés à la section stroboscopique ont tendance à se disperser sur l'ensemble du portrait de phase de l'attracteur (voir Fig. A.5b). En revanche, si la période du stroboscope correspond à $2\pi/\omega_e$, les points associés se regroupent sur un plan (voir Fig. A.5c). Il convient donc de proposer une méthode minimisant la variance du stroboscope calculé. L'algorithme que nous proposons est le suivant :

1. Estimer T_0 la période initiale du stroboscope. Initialiser un pas de temps $\delta t_s = 1$.
2. Réaliser une série de sections stroboscopiques en faisant varier la période d'estimation comme $T_n + k\delta t_s$, k variant de -20 à 20 .
3. Calculer pour chaque section stroboscopique la variance V de la section. V est la somme des variances suivant chacune des directions du stroboscope.
4. Prendre comme nouvelle période T_n la période minimisant V .
5. Si $|T_n - T_{n-1}| < v$ et que $T_n \neq T_{n-1}$, avec v un critère de convergence, passer à l'étape 7. Sinon :
6. Raffiner le pas de temps $\delta t_s = \delta t_s/10$ et reprendre à l'étape 2.
7. Vérifier que la période T_n obtenue n'est pas une harmonique de $2\pi/\omega_e$ en divisant T_n par 2 jusqu'à ce que plus d'un nuage de points soit formé dans la section stroboscopique (voir Figs. A.5c et A.5d). La pulsation $\omega_e = 2\pi/T_n$ est alors la estimée à partir du dernier T_n pour lequel un unique nuage de points est observé.

Cet algorithme a été employé dans l'ensemble du mémoire pour déterminer la pulsation dominante associée à chaque régime stable de l'écoulement. Ces différentes pulsations sont récapitulées dans la table A.4.

A.4 Filtrage fréquentiel

Nous représentons les modes des dynamiques identifiées à partir de la transformée de Fourier en chacun des points du champ de température $\Theta(X, Z, t)$. Le champ des coefficients de Fourier

Dynamique	$Ra(\times 10^8)$	λ_1	λ_2	λ_3
T^1	1.8	$(-1.49 \pm 1.9) \times 10^{-6} \simeq 0$	$= (-3.16 \pm 0.002) \times 10^{-3} < 0$	$(-1.54 \pm 0.01) \times 10^{-2} < 0$
T_C^1	1.64	$(-1.71 \pm 0.02) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(-1.07 \pm 0.11) \times 10^{-3} < 0$	$(-1.03 \pm 0.11) \times 10^{-3} < 0$
T_C^2	2.3	$(-5.04 \pm 1.78) \times 10^{-6} \simeq 0$	$(-6.86 \pm 1.44) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(-3.64 \pm 0.05) \times 10^{-4} < 0$
T_A^3	2.35	$(8.43 \pm 9.14) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(-0.52 \pm 1.35) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(0.91 \pm 1.27) \times 10^{-5} \simeq 0$
C_A	2.649	$(8.75 \pm 0.12) \times 10^{-3} > 0$	NE	NE
C_A	2.855	$(1.5 \pm 0.19) \times 10^{-3} > 0$	NE	NE
T_{C2}^3	2.55	$(5.60 \pm 3.06) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(0.59 \pm 6.46) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(-2.47 \pm 8.57) \times 10^{-5} \simeq 0$
T_{C2}^2	2.57	$(4.34 \pm 3.39) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(1.20 \pm 0.75) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(-6.05 \pm 1.12) \times 10^{-4} < 0$
T_{C2}^2	2.59	$(-0.36 \pm 2.82) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(-0.60 \pm 1.53) \times 10^{-4} \simeq 0$	$(-6.65 \pm 0.54) \times 10^{-4} < 0$
C_X	2.65	$(3.27 \pm 0.29) \times 10^{-3} > 0$	NE	NE
T_H^2	2.855	$(1.21 \pm 0.92) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(2.02 \pm 1.91) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(9.38 \pm 0.29) \times 10^{-4} < 0$
T_{A2}^3	3.05	$(5.25 \pm 7.08) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(-6.92 \pm 4.56) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(7.23 \pm 6.85) \times 10^{-5} \simeq 0$
T_H^3	3.08	$(2.63 \pm 5.80) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(1.81 \pm 7.79) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(0.40 \pm 4.36) \times 10^{-5} \simeq 0$
C_{A2}	3.16	$(7.43 \pm 0.41) \times 10^{-3} > 0$	NE	NE
T_P^3	3.20	$(8.54 \pm 5.64) \times 10^{-5} > 0$	NE	NE
H_H	3.35	$(6.46 \pm 0.40) \times 10^{-3} > 0$	$(3.62 \pm 0.38) \times 10^{-3} > 0$	$(3.61 \pm 4.28) \times 10^{-4} \simeq 0$
C_F	3.4	$(5.38 \pm 3.26) \times 10^{-4} > 0$	NE	NE
C_F	3.48	$(7.80 \pm 0.31) \times 10^{-4} > 0$	NE	NE
C_L	3.54	$(7.66 \pm 0.31) \times 10^{-3} > 0$	NE	NE
T_K^1	3.54	$(-2.0 \pm 0.03) \times 10^{-5} \simeq 0$	$(-2.5 \pm 0.1) \times 10^{-4} < 0$	$(-8.9 \pm 0.2) \times 10^{-4} < 0$
H_C	3.65	$(3.05 \pm 0.29) \times 10^{-3} > 0$	NE	NE
H_C	3.71	$(1.22 \pm 0.04) \times 10^{-2} > 0$	$(3.01 \pm 0.42) \times 10^{-3} > 0$	$(-4.98 \pm 3.45) \times 10^{-4} \gtrsim 0$
H_C	3.79	$(1.30 \pm 0.03) \times 10^{-2} > 0$	$(4.35 \pm 0.25) \times 10^{-3} > 0$	$(7.97 \pm 2.51) \times 10^{-4} > 0$
H	3.65	$(1.62 \pm 0.07) \times 10^{-2} > 0$	$(1.28 \pm 0.03) \times 10^{-2} > 0$	$(1.10 \pm 0.04) \times 10^{-2} > 0$
H	4.00	$(2.16 \pm 0.05) \times 10^{-2} > 0$	$(1.19 \pm 0.05) \times 10^{-2} > 0$	$(1.13 \pm 0.06) \times 10^{-2} > 0$

TABLE A.3 – Estimation des premiers exposants de Lyapunov pour l'écoulement de cavité différentiellement chauffée 2D. Les exposants non évalués sont signifiés par NE . Les dynamiques associées sont décrites au chapitre 2 pour T_C^1 , T_C^2 , T^1 et T^2 . Les autres dynamiques sont décrites au chapitre 4. ([Retour au texte](#))

Dynamique	Ra d'évaluation ($\times 10^8$)	ω_e	Période correspondante
T^1	1.587	0.2821727	22.267162050
T_C^1	1.7	0.2782387	22.581992898
T^2	2.1	0.2755263	22.804301795
T_C^2	2.1	0.2803772	22.409755730
T_A^2	2.1	0.2792051	22.503834770
T_A^3	2.35	0.2845421	22.081743130
T_{C2}^3	2.55	0.2846660	22.072133190
T_{C2}^2	2.57	0.2851268	22.036459496
T_{C3}^2	2.624	0.2855047	22.007293646
T_{C3}^1	2.63	0.0408006	153.99733461
T_X^2	2.55	0.0571648	109.91354166
T_X^1	2.62	0.0572022	109.84169774
T_S^1	2.62	0.0286011	219.68345028
T_H^2	2.7	0.1427483	44.015842561
T_H^3	3.08	0.1423511	44.138652431
T_{A2}^3	3.05	0.1436154	44.750065771
T_F^2	3.05	0.0713657	88.042116773
T_P^2	3.05	0.0713522	88.058739201
T_P^3	3.15	0.0710192	88.471637880
T_K^1	3.54	0.0719512	87.325599610
$2 - T_{L1}^1$	3.5	0.0238256	263.71624874
$1 - T_{L1}^1$	3.51	0.0476740	131.79470858
$4 - T_{L2}^1$	3.57	0.0179314	350.39962071
$2 - T_{L2}^1$	3.58	0.0358805	175.11415445
$1 - T_{L2}^1$	3.61	0.0718679	87.426844199

TABLE A.4 – Table de la pulsation dominante de chacune des dynamiques décrites aux chapitres 2 et 4. ([Retour au texte](#))

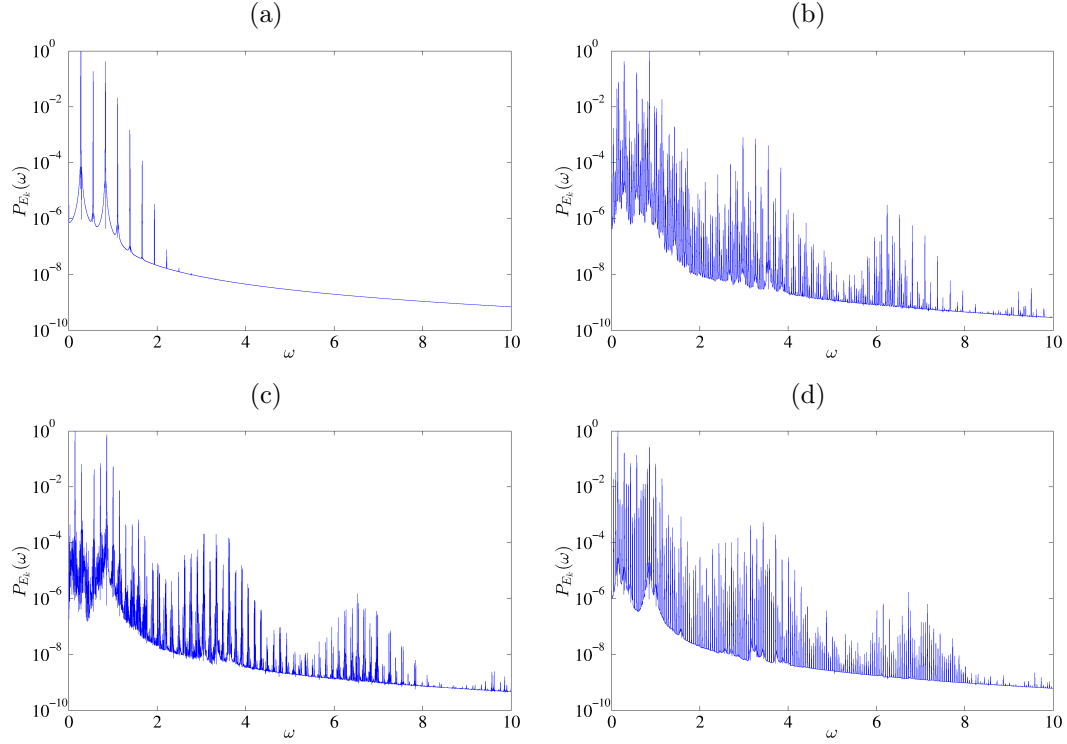


FIGURE A.4 – Spectre en puissance d’une dynamique (a) T^1 à $Ra = 1.8 \times 10^8$, (b) T_{C3}^2 à $Ra = 2.625 \times 10^8$, (c) T_{A2}^3 à $Ra = 3.05 \times 10^8$ et (d) T_L^1 à $Ra = 3.52 \times 10^8$. Ces dynamiques sont décrites aux chapitres 2 et 4. ([Retour au texte](#))

$\bar{\Theta}(X, Z, \omega)$ obtenu est filtré en relevant l’amplitude réelle et imaginaire des coefficients de Fourier à la pulsation ω_F choisie.

$\bar{\Theta}(X, Z, \omega)$ peut être décomposée en $\bar{\Theta}(X, Z, \omega) = Re(\bar{\Theta}(X, Z, \omega)) + iIm(\bar{\Theta}(X, Z, \omega))$. $\Theta(X, Z, t)$ étant un champ à valeurs réelles, $\bar{\Theta}(X, Z, -\omega)$ correspond au champ complexe conjugué $\bar{\Theta}^*(X, Z, \omega)$ de $\bar{\Theta}(X, Z, \omega)$. Il est donc possible ici de ne considérer que le cas d’un filtre sur ω positif. Dans ce cas, la reconstruction du champ de température filtré $\Theta_F(X, Z, t)$ est donnée par la transformée de Fourier inverse :

$$\Theta_F(X, Z, t) = \bar{\Theta}(X, Z, \omega_F)e^{i\omega_F t} + \bar{\Theta}^*(X, Z, \omega)e^{-i\omega_F t}. \quad (A.22)$$

À $t = 0$,

$$\Theta_F(X, Z, t = 0) = 2Re(\bar{\Theta}(X, Z, \omega_F)). \quad (A.23)$$

Pour $t = -\pi/(2\omega_F)[2\pi]$, nous obtenons :

$$\Theta_F(X, Z, t = -\pi/(2\omega_F)) = 2Im(\bar{\Theta}(X, Z, \omega_F)). \quad (A.24)$$

C’est pourquoi il est possible de considérer la partie réelle et imaginaire des champs de coefficients $\bar{\Theta}(X, Z, \omega_F)$ qui, à un facteur 2 près, représentent les champs de température filtrés respectivement en $t = 0$ et $t = -\pi/(2\omega_F)$. Les différentes étapes de ce procédé de filtrage sont représentées sur la Fig. A.6.

A.5 Calcul des corrélations

Introduit par Ketzmerick *et al.* [38], ce critère permet de caractériser la nature d’une dynamique à partir du calcul de l’autocorrélation temporelle de l’une de ses observables.

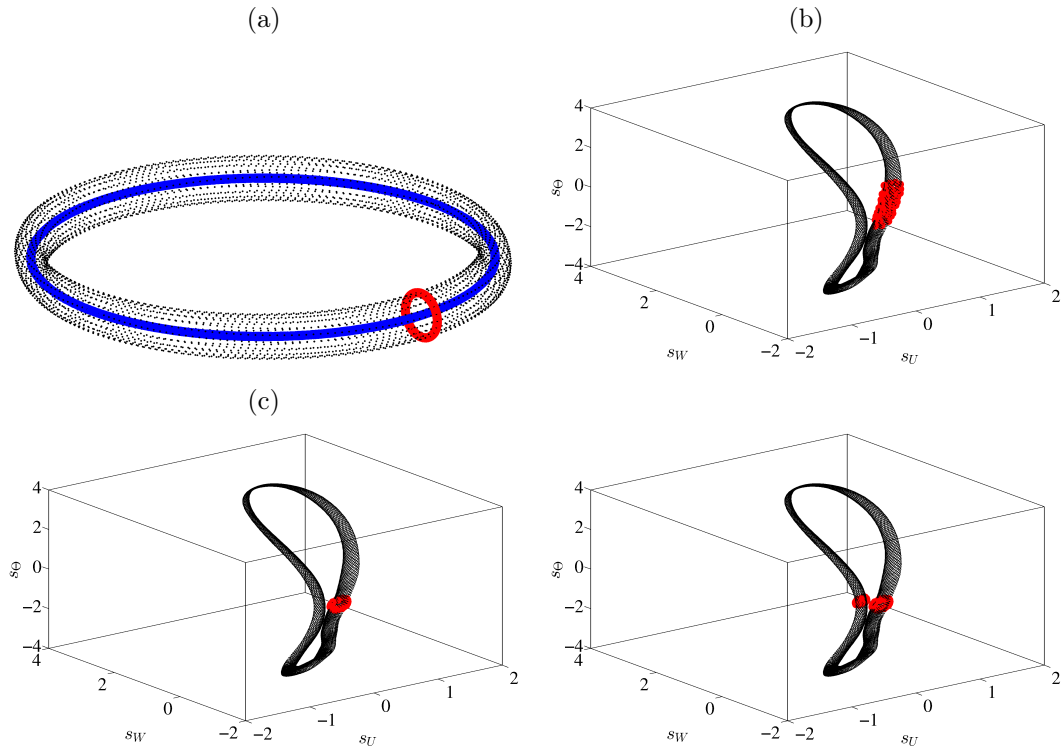


FIGURE A.5 – (a) Schéma d’une dynamique à deux fréquences incommensurables (noir). Le tore peut être décomposé en deux cercles. Le plus long est de pulsation ω_e (pulsation enveloppe, dont on souhaite connaître la valeur, en bleu sur la figure), le plus rapide de pulsation ω_p (pulsation porteuse, en rouge sur la figure). (b-c-d) : Section stroboscopique (rouge) d’une dynamique T_A^2 à $Ra = 2.3 \times 10^8$ (voir chapitre 4). (b) La période du stroboscope vaut $T = 22.1$. (c) La période du stroboscope vaut $T = 22.13524641$. (d) La période du stroboscope vaut $T = 11.067623205$. Les points formant les différents stroboscopes sont obtenus à partir d’interpolations linéaires. ([Retour au texte](#))

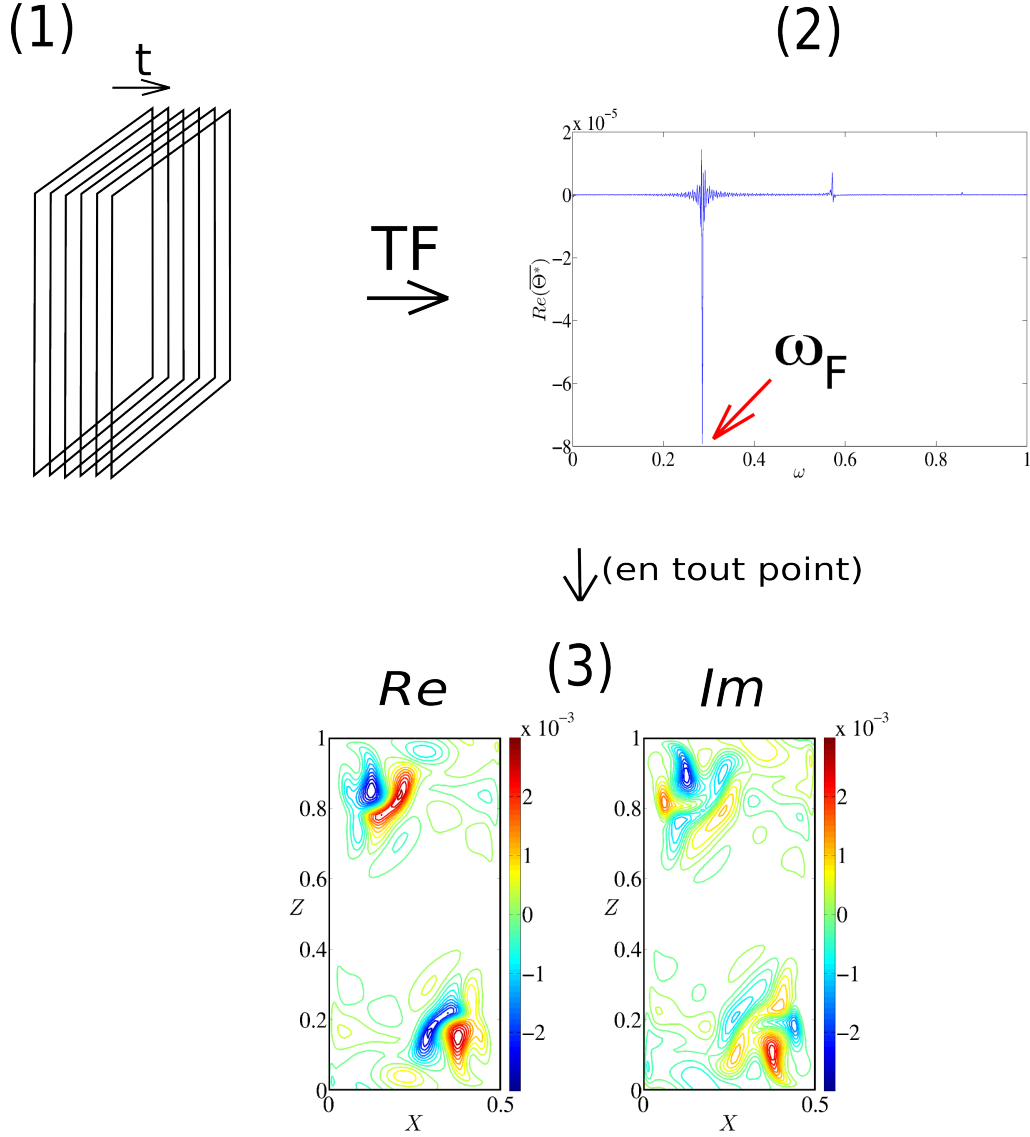


FIGURE A.6 – Les différentes étapes du procédé de filtrage en pulsation donnant accès à la structure spatiale du champ de température associé à une pulsation ω choisie. (1) Extraction d'un grand nombre de champs de température. (2) On réalise la Transformée de Fourier (TF) en chacun des points en relevant l'amplitude spectrale à la pulsation choisie. (3) On représente la partie réelle (Re) et la partie imaginaire (Im) des coefficients de Fourier associés à ω en chacun des points de l'écoulement. Cette méthode est illustrée sur le champ de température d'une dynamique T_C^1 pour $\omega = \omega_e^{T_C^1}$ à $Ra = 1.8 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

Cas	α
Périodique	0
Quasi-périodique	0
Chaotique	≈ 1

TABLE A.5 – Valeur de l'exposant α pour différents types de dynamiques. $\alpha = 0$ traduit une dynamique T^n , $\alpha \neq 0$ une dynamique chaotique. ([Retour au texte](#))

A.5.1 Définition et calcul

Introduisons la fonction :

$$C_{av}(t) = \frac{1}{N\delta t} \sum_{k=0}^{N-1} |C(k)|^2, \quad (\text{A.25})$$

avec $N\delta t$ l'horizon en temps, δt le pas de temps choisi et $C(k)$ la fonction d'autocorrélation discrète associée à l'observable x :

$$C'(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-k)$$

$$C(k) = C'(k)/C'(0).$$

Il est attendu que $C_{av} = \mathcal{O}(t^{-\alpha})$. $\alpha = 0$ traduit une dynamique T^n , $n \geq 0$ (cette valeur est caractéristique d'un spectre discret en fréquence) tandis que $\alpha \approx 1$ traduit une dynamique chaotique (caractéristique d'un spectre continu en fréquence). Dans le cas d'un système à haute dimension, le régime chaotique est plutôt défini par $\alpha \neq 0$.

Le calcul numérique de $C_{av}(t)$ ne se fait pas directement à l'aide de la formule (A.25). En effet, si cette formulation est appliquée directement, alors le coût du calcul de C_{av} augmente à mesure que l'horizon en temps augmente. C'est pourquoi la relation de récurrence suivante est préférée :

$$C'_{av}(\delta t) = |C(0)|^2$$

$$C'_{av}(k\delta t) = C_{av}((k-1)\delta t) + |C((k-1)\delta t)|^2, k > 1 \quad (\text{A.26})$$

$$C_{av}(k\delta t) = C'_{av}/(k\delta t)$$

Cette méthode d'évaluation permet d'éviter l'augmentation de la complexité du calcul pour les signaux longs et réduit considérablement le temps mis à évaluer $C_{av}(t)$.

A.5.2 Étalonnage

L'algorithme a été étalonné sur trois cas tests :

1. Le cas d'une fonction périodique $Y(t) = 2 \cos(t)$ (fig. A.7 première ligne),
2. Le cas d'une fonction quasi-périodique $Y(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{5}t)$ (fig. A.7 seconde ligne),
3. Le cas de l'attracteur de Lorenz chaotique avec $\sigma = 10$ $\beta = 8/3$ et $\rho = 28$ (voir [48], [76]) sur l'observable $x(t)$ (fig. A.7 troisième ligne).

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure A.7 ainsi que dans le tableau A.5. On vérifie que pour les régimes périodiques (ou quasi-périodiques) T^n , $C_{av}(t)$ tend vers une constante ($\alpha = 0$) et vers 0 ($\alpha \neq 0$) dans le cas chaotique de l'attracteur de Lorenz.

A.6 Convergence en maillage

Les exposants de Lyapunov sont des grandeurs caractéristiques des dynamiques observées et peuvent être utilisés pour vérifier la convergence en maillage des calculs DNS réalisés. Notre étude montre que pour $Ra = 4.0 \times 10^8$, la dynamique obtenue est hyper-chaotique (possède plus d'un

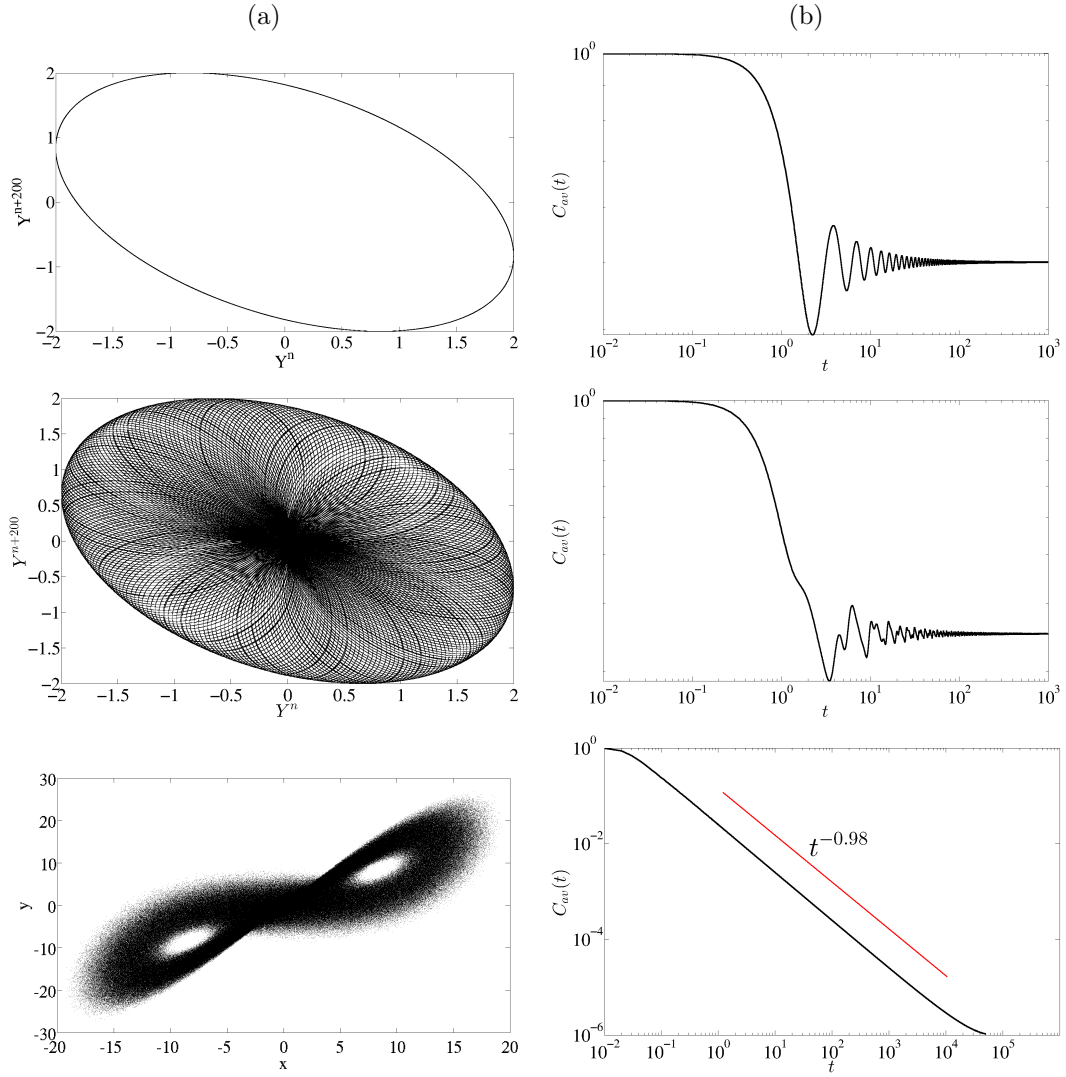


FIGURE A.7 – Colonne (a) : Portraits de phase des différentes dynamiques. Colonne (b) : calcul de $C_{av}(t)$. Première ligne : cas de la fonction périodique $Y(t) = 2 \cos(t)$, seconde ligne : cas de la fonction quasi- périodique $Y(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{5}t)$, troisième ligne : cas de l'attracteur de Lorenz chaotique avec $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ et $\rho = 28$. $C_{av}(t)$ est calculée sur l'observable $x(t)$. ([Retour au texte](#))

Mesure i	$N_x \times N_z$	# de points	$\lambda_1 (\times 10^{-2})$	$e_{\lambda_1}/\lambda_1 (\%)$	A (%)	G (%)
1	40×50	2000	9.15 ± 0.023	0.26	—	—
2	60×76	4560	3.73 ± 0.014	0.38	56.14	147.6 ± 1.75
3	70×90	6300	2.22 ± 0.014	0.62	27.62	64.33 ± 2.92
4	80×100	8000	1.97 ± 0.016	0.81	21.25	14.0 ± 4.21
5	90×110	9900	1.79 ± 0.032	1.78	19.19	10.08 ± 4.55

TABLE A.6 – Évaluation de l'exposant de Lyapunov le plus instable pour la dynamique chaotique HC à $Ra = 4.0 \times 10^8$, à $\tau_\lambda = \Delta t_\perp$. Le gain de précision vaut $G = \frac{|\lambda_1^{(i)} - \lambda_1^{(i-1)}|}{|\lambda_1^{(i)}|}$ où i correspond au numéro de la mesure. L'augmentation relative du nombre de points de collocation est $A = \frac{|\# \text{ de points}^{(i+1)} - \# \text{ de points}^{(i)}|}{\# \text{ de points}^{(i+1)}}$, avec i le numéro de la mesure. ([Retour au texte](#))

exposant de Lyapunov positif). Cette valeur de Ra possède la dynamique la plus chaotique de notre étude, et donc la plus sensible aux erreurs de discrétisation spatiale/temporelle. Nous vérifions que la valeur du premier exposant de Lyapunov (le plus instable) reste sensiblement la même pour différentes valeurs du maillage utilisé dans la simulation.

Les résultats obtenus sont résumés sur le tableau A.6 et sur la figure A.8. Nous voyons qu'augmenter le maillage au-delà de 80×100 points ne permet plus de gain de précision relatif significatif (supérieur à 15%) sur l'évaluation de λ_1 . C'est pourquoi nous supposons ce maillage spatial suffisant pour pouvoir décrire l'ensemble des dynamiques observées dans l'écoulement, jusqu'à $Ra = 4.0 \times 10^8$.

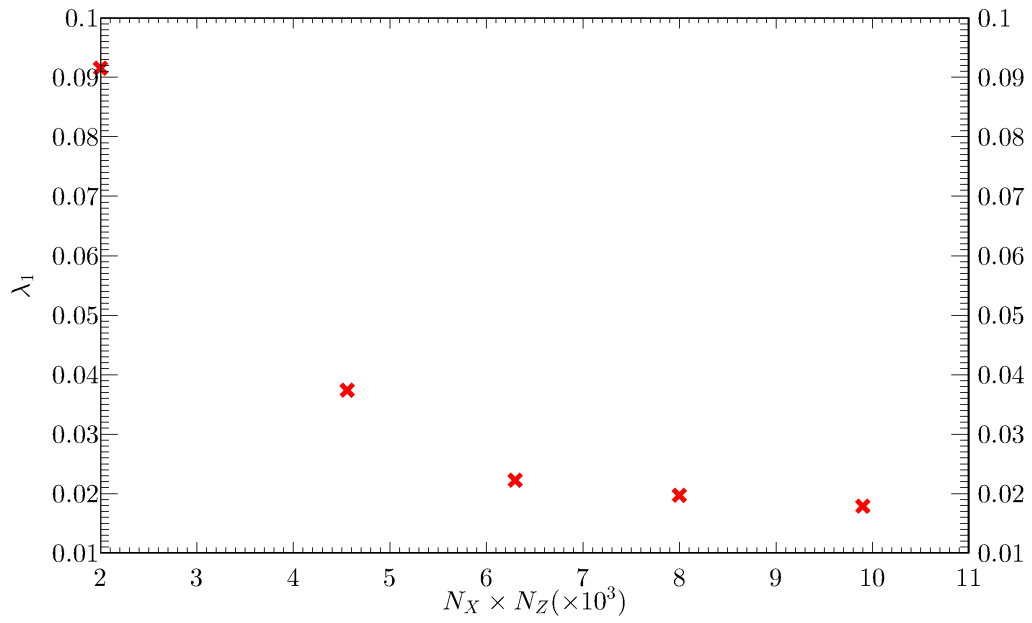


FIGURE A.8 – Variation du plus grand exposant de Lyapunov en fonction du nombre de points de collocation ($N_X \times N_Z$) utilisés pour approximer les solutions du système (2.21). La dynamique sur laquelle est calculée λ_1 est une dynamique hyper-chaotique *HC* (voir chapitre 4) à $Ra = 4.0 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

Annexes partie Lagrangienne

B.1 Section stroboscopique

Ce paragraphe définit la section stroboscopique Π utilisée pour caractériser le mélange dans notre étude.

Considérons une application bidimensionnelle π transportant la position de toute particule dans un domaine \mathcal{D} sur sa position à un temps T plus tard : $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ telle que $\pi(\mathbf{X}_0) = \phi^T(\mathbf{X}_0)$, avec ϕ^T l'opérateur propageant les particules sur un temps T . Nous définissons la section stroboscopique d'une trajectoire donnée passant par \mathbf{X}_0 comme $\Pi = \{\pi^n(\mathbf{X}_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Dans le cas où le champ de vitesse de l'écoulement est périodique, si le temps T correspond à la période du champ de vitesse, alors la section stroboscopique devient équivalente à considérer une section de Poincaré de l'écoulement. La section Π simplifie considérablement la représentation du mouvement des particules (voir Figs B.1a) et souligne certaines particularités topologiques de l'écoulement (voir Fig. B.1b) du point de vue lagrangien. Elle permet par exemple de mettre en évidence l'existence de zones distinctes dans l'écoulement. De plus, si l'écoulement est incompressible, les aires se conservent et aucune information n'est perdue par la réduction du flot continu ϕ^t à π .

Dans cette représentation, une orbite périodique de période nT se traduit par un ensemble n de points périodiques répartis sur l'orbite.

B.2 Aspects numériques

B.2.1 Schéma temporel

Nous comparons dans ce paragraphe différents schémas numériques pour résoudre un système d'équations du type :

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)), \quad (\text{B.1})$$

où $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ et $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_N)$. Nous considérons trois schémas numériques :

1. un schéma d'Euler d'ordre 1 (E1),
2. un schéma de Runge-Kutta implicite (IRK) d'ordre 2 (IRK2). Ce schéma numérique est un schéma symplectique (qui préserve le produit vectoriel et conserve l'énergie) d'ordre 4 en temps [84], [33].
3. un schéma de Runge-Kutta explicite (ERK) d'ordre 4 (ERK4).

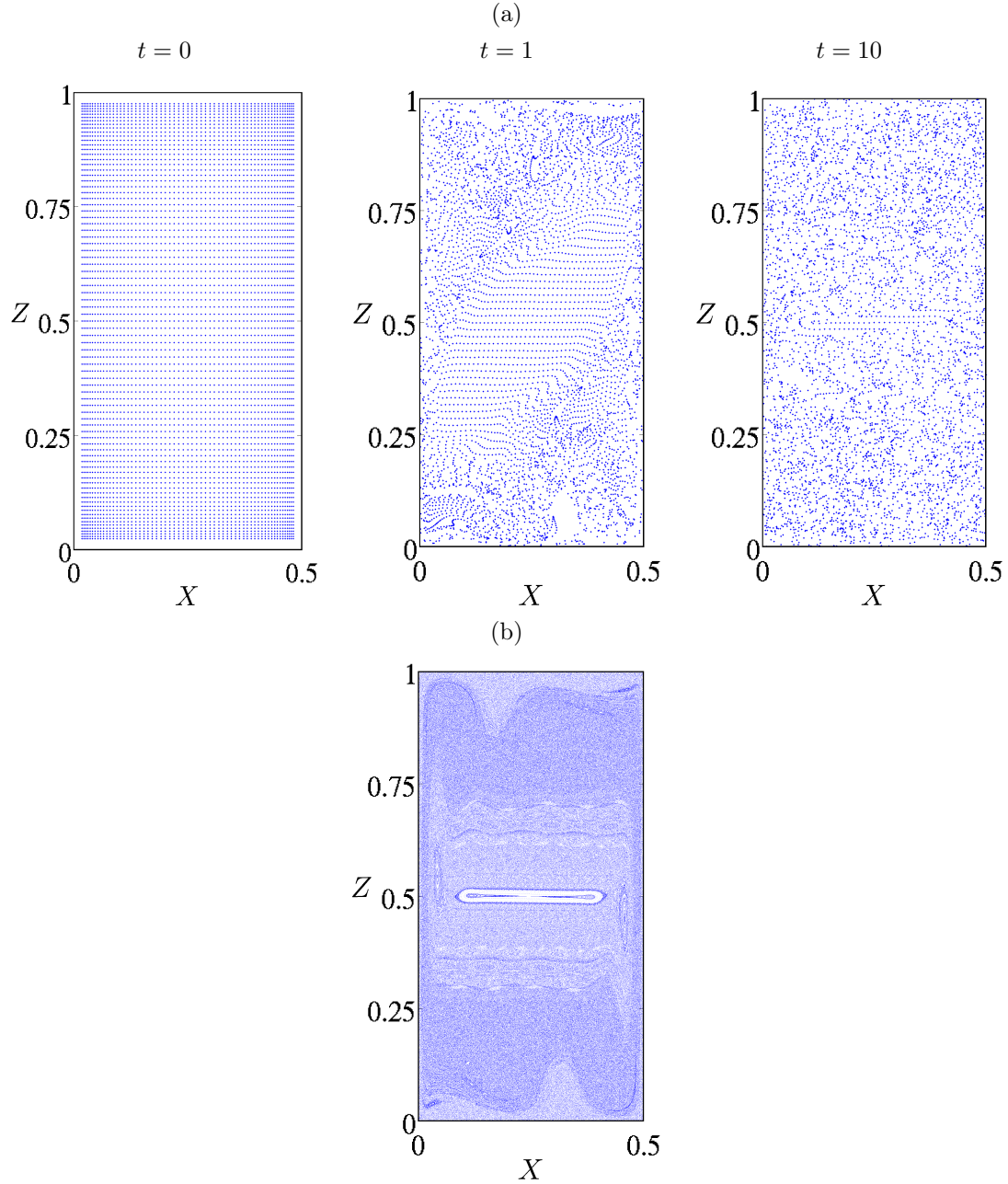


FIGURE B.1 – (a) Instantanés de la position d'un ensemble de particules pour différents temps d'intégration. (b) Section stroboscopique Π résultante. Π est construite sur 200 périodes du champ de vitesse. Ces différentes images sont produites pour l'écoulement de cavité différentiellement chauffée 2D sur une dynamique T^1 (voir chapitre 2) à $Ra = 1.625 \times 10^8$. La période du champ de vitesse est 22.7127. ([Retour au texte](#))

Méthodes de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta consistent à propager les équations (B.1) entre un temps t et $t + \delta t$ en posant :

$$k_i = F_l(t + c_i \delta t, X_l + \delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), i = 1, \dots, s, \quad (\text{B.2})$$

où s correspond à l'ordre de la méthode considérée, $l = 1, \dots, N$ et $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$. La solution de l'équation (B.1) propagée d'un pas de temps δt est alors :

$$X_l(t + \delta t) = X_l(t) + \delta t \sum_{j=1}^s b_j k_j. \quad (\text{B.3})$$

Les coefficients a_{ij} et b_j sont donnés par la table de Butcher [12], [13].

Dans le cas des schémas IRK, la matrice des coefficients a_{ij} est pleine. L'équation (B.2) dépend alors des coefficients k_i à la fois dans le membre de droite comme dans le membre de gauche de l'équation. Le jeu d'inconnues k_i doit être résolu à chaque pas de temps δt en trouvant les racines de l'équation :

$$k_i - F_l(t + c_i \delta t, X_l + \delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) = 0, i = 1, \dots, s. \quad (\text{B.4})$$

La méthode la plus couramment utilisée afin de trouver les racines de l'équation (B.4) est la méthode de Newton. Cette méthode est présentée au §B.2.3.

Méthodes IRK2 et ERK4

Pour le schéma IRK2, le jeu de coefficients a_{ij} et b_j vaut [84] :

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Pour le schéma ERK4, ces coefficients sont [12] :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Comparaison entre les méthodes IRK2 et ERK4

Nous comparons dans ce paragraphe les méthodes IRK2 et ERK4 dans trois cas distincts :

1. Le cas de l'approximation d'une fonction exponentielle,
2. Le cas du suivi d'un traceur passif dans un réseau de tourbillons bidimensionnels où le champ de vitesse est connu analytiquement en chacun des points,

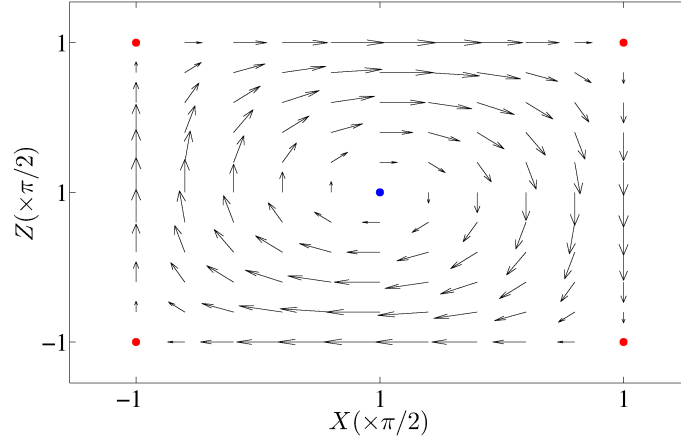


FIGURE B.2 – Champ de vitesse utilisé pour le suivi de traceurs passifs dans un réseau périodique de tourbillons bidimensionnels. Les points fixes hyperboliques de l'écoulement sont indiqués en rouge, le point fixe elliptique en bleu. ([Retour au texte](#))

3. Le cas du suivi d'un traceur passif dans un réseau de tourbillons bidimensionnels où le champ de vitesse n'est connu que sur un nombre fini de points, à l'image de l'étude lagrangienne présentée au chapitre 3. Le champ de vitesse utilisé est montré sur la figure B.2.

Pour chacun de ces trois cas test, nous utilisons un pas de temps $\delta t = 10^{-3}$. Le schéma d'Euler d'ordre 1 ($\mathbf{X}(t + \delta t) = \mathbf{X}(t) + \delta t \mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$) est également considéré pour les comparaisons. Le critère de convergence de la méthode de Newton utilisée pour le calcul des coefficients k_i pour le schéma IRK2 est fixé à $G < 10^{-10}$ (voir §B.2.3).

Cas 1D : approximation de l'exponentielle

Considérons l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = x(t), \quad (\text{B.7})$$

ayant pour solution $x(t) = x_0 e^t$. Cette équation est résolue numériquement via les méthodes d'Euler explicite d'ordre 1, RKE d'ordre 4 et RKI d'ordre 2. Les résultats sont donnés sur la figure B.3a. Nous voyons que la méthode RKI d'ordre 2 donne de meilleurs résultats que la méthode RKE d'ordre 4. La méthode d'Euler explicite est, comme attendu, la méthode donnant les moins bonnes approximations.

Cas 2D : calcul d'une trajectoire dans un réseau de vortex

Considérons le cas du système $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}(t))$ avec pour champ de vitesse stationnaire 2D $\mathbf{U} = (U, W)$:

$$\begin{aligned} U(X, Z) &= \cos(X) \sin(Z) \\ W(X, Z) &= -\sin(X) \cos(Z) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Ce champ de vitesse vérifie :

$$\partial_X U + \partial_Z W = 0 \quad (\text{B.9})$$

et admet donc une structure hamiltonienne. Deux approches sont adoptées ici :

1. le cas où U et W sont connus en tous points et
2. le cas où U et W sont connus sur une grille de 10×10 points équirépartis entre $[-\pi/2, \pi/2] \times [\pi/2, \pi/2]$. Le champ de vitesse utilisé est représenté sur la figure B.2.

L'erreur $e(t)$ est évaluée à partir de la connaissance de la fonction de courant $\Psi = -\cos(X) \cos(Z)$. Le système étant hamiltonien et stationnaire, toute particule doit suivre l'iso-valeur Ψ_0 sur laquelle

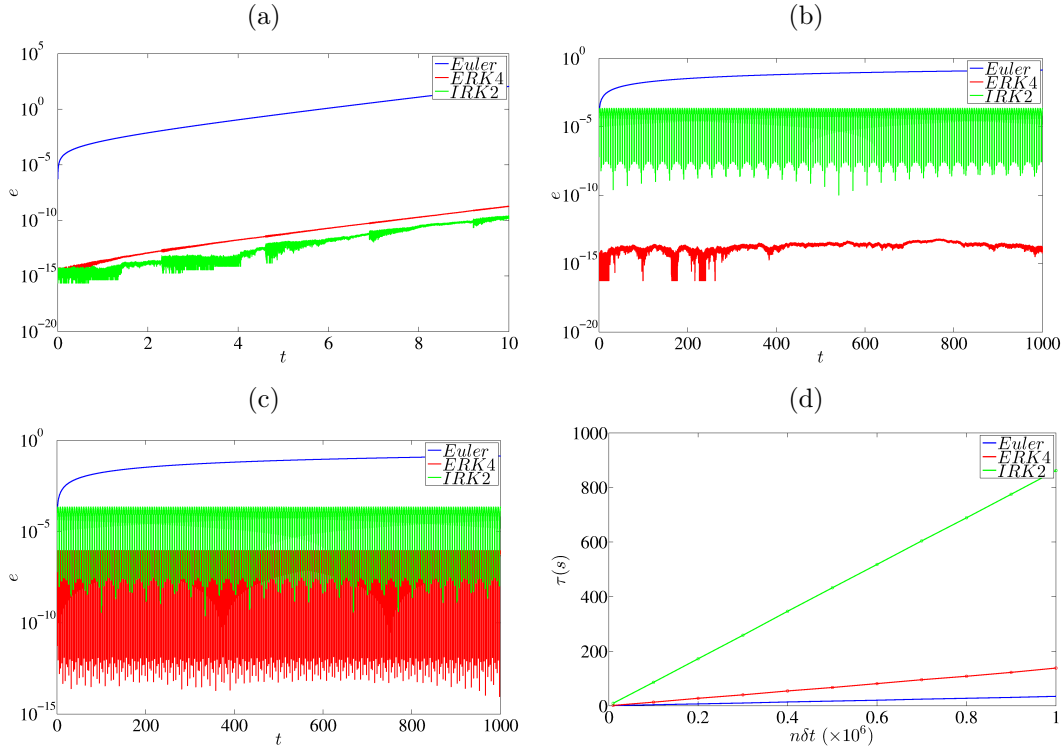


FIGURE B.3 – Comparaison de l’erreur commise entre les schémas numériques d’Euler (bleu), Runge-Kutta implicite d’ordre 2 (IRK2, en vert) et Runge-Kutta explicite d’ordre 4 (ERK4, en rouge). Pour chacun de ces cas test, le pas de temps vaut $\delta t = 10^{-3}$, la condition initiale est prise à $x_0 = 1$ pour le cas (a), $\mathbf{X}_0 = (1, 1)$ pour les cas (b), (c) et (d). (a) Cas d’une fonction exponentielle. (b) Cas d’un réseau de vortex 2D connu en chacun des points. (c) Cas d’un réseau de vortex 2D sur une grille finie de 10×10 points de maillage équi-répartis entre $(X, Z) \in [(-\pi/2, \pi/2), (-\pi/2, \pi/2)]$. Les interpolations utilisées correspondent à des interpolations d’ordre 5 telles que décrites en section B.2.2. (d) Temps de calcul τ (secondes) en fonction du nombre d’itération en temps $n\delta t$ pour le cas (c). ([Retour au texte](#))

elle est initialement placée. L’erreur $e(t)$ est alors évaluée comme :

$$e(t) = |\Psi(t) - \Psi_0|. \quad (\text{B.10})$$

Les résultats sont présentés sur les figures B.3b et c. Nous y observons que dans le cas où le champ de vitesse est connu en chacun des points, la méthode ERK d’ordre 4 est la plus performante, malgré de bons résultats donnés par la méthode IRK d’ordre 2. La même conclusion s’applique au cas où \mathbf{U} n’est connu qu’en un nombre fini de points.

En comparant à présent le temps de calcul lié aux intégrateurs ERK4 et IRK2 (Fig. B.3d), nous voyons que la méthode IRK2 est plus coûteuse (d’un facteur environ 6.25) que la méthode ERK4.

Ce dernier constat nous conduit à conclure que les schémas symplectiques n’ont pas de réel avantage pratique dans le cas de problèmes lagrangiens 2D. Ces raisons justifient notre choix d’utiliser un schéma ERK d’ordre 4 pour l’étude du mélange dans l’écoulement de cavité différentiellement chauffée 2D.

B.2.2 Interpolations

Dans le cas d’un écoulement expérimental ou provenant d’une simulation, le champ de vitesse $\mathbf{U} = (U, W)$ n’est connu que sur un nombre fini de points. Pour cette raison, il est nécessaire de recourir à des interpolations afin d’estimer la vitesse au point où se situe une particule. Dans notre cas, la méthode d’interpolation utilisée est une méthode basée sur les polynômes orthogonaux sur une base de Chebyshev, décrite ci-après.

Interpolations de Chebyshev 1D

En une dimension, une interpolation basée sur les polynômes orthogonaux se réalise de la manière suivante [58] : Soit $f(x)$ donnée aux points $x_j, j = 0, \dots, n$ dans l'intervalle (a, b) avec $a \leq x_j \leq b$. Soit $P_k(x)$ une suite de polynômes constituant une base complète des fonctions définies sur (A, B) alors :

1. On ramène x_j dans (A, B) par la relation :

$$y = \frac{(B - A)x + Ab - aB}{b - a}. \quad (\text{B.11})$$

À chaque point $x_j \in (a, b)$ correspond donc un point $y_j \in (A, B)$.

2. On pose $f(y_j) = f(x_j) = f_j$ et on approxime :

$$f(y) \simeq \sum_{j=0}^n a_k P_k(y) \quad (\text{B.12})$$

où P_k correspond à une base complète de polynômes.

3. On détermine les coefficients a_k par collocation aux $n + 1$ points d'interpolation :

$$f_j = \sum_{i=0}^n a_i P_i(y_j), j = 0, \dots, n \quad (\text{B.13})$$

ce qui revient à résoudre le système de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues :

$$\begin{bmatrix} P_0(y_0) & \dots & P_n(y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(y_n) & \dots & P_n(y_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

4. On a $f(x) = f(y)$ avec y relié à x par (B.11) et $f(y)$ donnée par (B.12).

Les polynômes de Chebyshev $T_l(y)$ de degré l correspondent aux polynômes $P_l(y)$ précédemment définis. Ils sont définis sur $[-1, 1]$ et se calculent pour tout y par :

$$\begin{cases} T_l(y) &= 2yT_{l-1}(y) - T_{l-2}(y), l \geq 2 \\ T_1(y) &= y \\ T_0(y) &= 1 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Pour pouvoir développer $f(x), (a \leq x \leq b)$ dans cette base, le changement de variables suivant doit être appliqué : $[A = -1, B = 1]$ et :

$$x = \frac{(b - a)y + b + a}{2} \quad (\text{B.16})$$

On peut alors calculer la valeur interpolée de $f(x)$ au point x par :

$$f(x) = f(y) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(y) \quad (\text{B.17})$$

Cas de l'interpolation 2D

Soit $\mathbf{x} = (x, z)$ le point où l'on souhaite réaliser l'interpolation. Soit $U(x_i, z_j), i, j = 0, \dots, n$ le champ discret contenant les valeurs sur lesquelles on souhaite réaliser l'interpolation au point \mathbf{x} et n l'ordre de l'interpolation. L'interpolation 2D est réalisée en interpolant successivement les valeurs de U suivant une des deux direction x ou z . Le vecteur résultant alors appelé \mathbf{U}' et ne dépend plus que d'une seule direction. L'interpolation au point \mathbf{x} est obtenue en interpolant à partir de \mathbf{U}' suivant la direction laissée libre précédemment. Ce procédé est illustré sur la figure B.4.

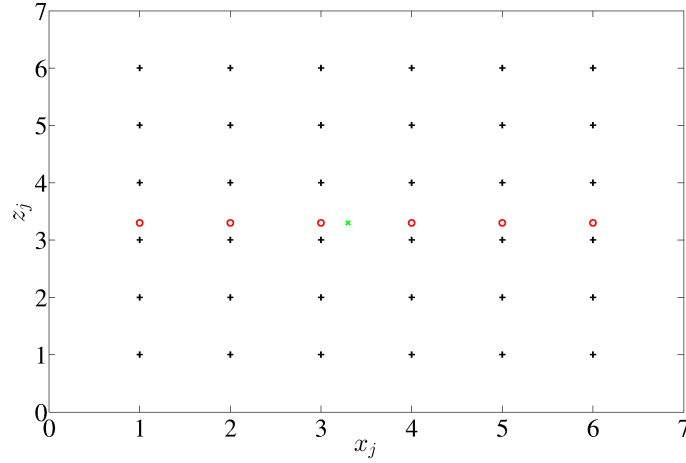


FIGURE B.4 – Schéma des différentes étapes pour l'interpolation 2D. Croix noires : grille d'interpolation initiale, ronds rouges : grille définissant le vecteur d'interpolation \mathbf{U}' , croix verte : point d'interpolation final. ([Retour au texte](#))

Pourquoi interpoler ?

En formulation spectrale, la vitesse \mathbf{U} peut être connue en tout point \mathbf{X} de l'écoulement à partir de la décomposition de Galerkin :

$$\mathbf{U}(X, Z) = \sum_i \sum_j a_{ij} T_i(X) T_j(Z), \quad (\text{B.18})$$

avec $i = 0, \dots, N_X$ et $j = 0, \dots, N_Z$. N_X et N_Z sont le nombre de points de discrétisation dans les directions X et Z , respectivement. a_{ij} correspondent aux coefficients spectraux de l'équation (A.4) et T_i et T_j une base polynomiale de Chebyshev. Considérons, de façon simplifiée, que les T_i et T_j s'expriment comme $T_i(X) \approx \cos(i \arccos(X))$ et $T_j(Z) \approx \cos(j \arccos(Z))$, respectivement. Le coût en nombre d'opérations nécessaire à l'évaluation de la vitesse à une position \mathbf{X} est estimé à :

$$(N_X + 1) \times (N_Z + 1) \times 4(K + 1) \times n \quad (\text{B.19})$$

où $(K + 1)$ représente le nombre d'opérations nécessaires à l'évaluation d'un cosinus ou d'un arccosinus et des multiplications pour l'évaluation des T_i et T_j . n représente le nombre de composantes de la vitesse ($n = 2$ dans notre étude). Suivant nos évaluations, $K \approx 20$ opérations. À partir d'un maillage de 80×100 points, utilisé pour résoudre le champ de vitesse de l'écoulement, l'évaluation de la vitesse d'une particule requiert donc environ 1.3×10^6 opérations.

Le nombre d'opérations nécessaires à l'évaluation de la vitesse d'une particule par l'interpolation 2D de Chebyshev d'ordre 5 est d'environ 800 opérations. L'interpolation permet donc un gain en nombre d'opérations de l'ordre de 1600. C'est pourquoi, au vu de la précision de nos interpolations et du gain en temps de calcul, nous avons choisi de ne pas considérer la décomposition de Galerkin pour propager les particules dans l'écoulement de cavité différentiellement chauffée 2D. Nous montrons en figure B.5a la fermeture des lignes de courant obtenue en considérant un schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 pour des interpolations de Chebyshev d'ordre 5 en espace dans la cavité différentiellement chauffée 2D pour $Ra = 100$. Le champ de vitesse associé est montré sur la figure B.5b. Nous voyons que dans le cas de cet écoulement nos lignes de courants sont fermées avec une précision de l'ordre de 10^{-10} en moyenne. En augmentant la valeur de Ra , cette fermeture est évaluée en moyenne à 10^{-7} (voir figure B.5c) dans le cas d'un champ stationnaire (instable) à $Ra = 2.05 \times 10^8$.

B.2.3 Algorithmes d'identification de points fixes/périodiques

Nous explicitons dans ce paragraphe deux méthodes utilisées pour identifier des points fixes et points périodiques. La première est une méthode de Newton généralisée à n dimensions, la seconde

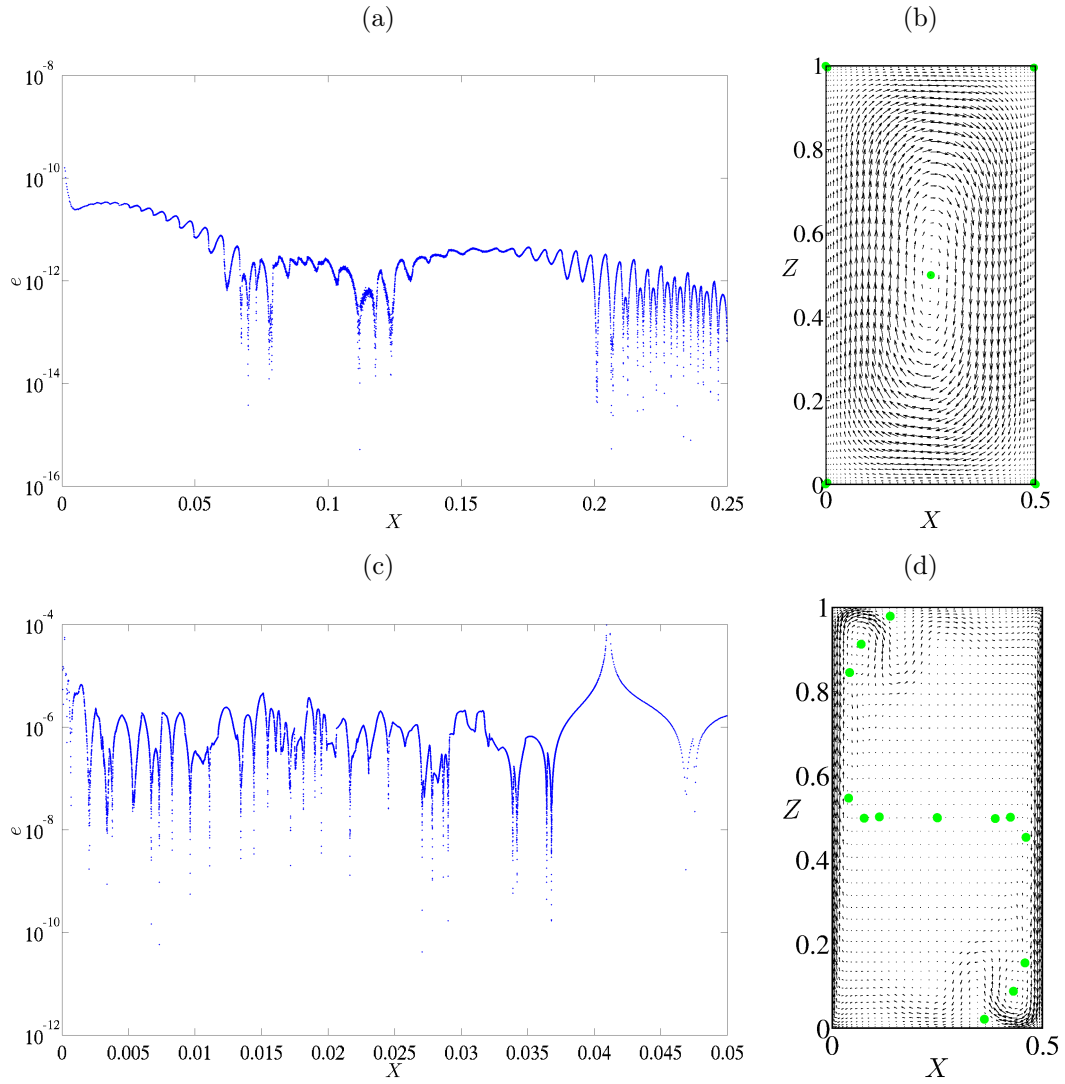


FIGURE B.5 – Gauche : fermeture des lignes de courant pour une ligne de traceurs initialement équirépartis sur le segment : (a) $X \in [0, 0.25]$, $Z = 0.5$ à $Ra = 100$ et (c) $X \in [0, 0.05]$, $Z = 0.5$ pour le champ de vitesse stationnaire (instable) à $Ra = 2.05 \times 10^8$. Droite : champs de vitesses stationnaires associés à (b) $Ra = 100$ et (d) $Ra = 2.05 \times 10^8$. Les points fixes du champ de vitesse sont représentés par des ronds verts. ([Retour au texte](#))

un algorithme basé sur une dichotomie généralisée à deux dimensions.

Méthode de Newton

Dans le cas multi-dimensionnel, la méthode consiste à évaluer :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \simeq \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (\text{B.20})$$

où \mathbf{J} correspond à la matrice jacobienne du système :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{F_1(\mathbf{X}_k + \varepsilon \mathbf{e}_1) - F_1(\mathbf{X}_k)}{\varepsilon} & \dots & \frac{F_1(\mathbf{X}_k + \varepsilon \mathbf{e}_n) - F_1(\mathbf{X}_k)}{\varepsilon} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{F_n(\mathbf{X}_k + \varepsilon \mathbf{e}_1) - F_n(\mathbf{X}_k)}{\varepsilon} & \dots & \frac{F_n(\mathbf{X}_k + \varepsilon \mathbf{e}_n) - F_n(\mathbf{X}_k)}{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

et \mathbf{e}_i au vecteur unitaire suivant la direction i . La racine de l'équation est alors approximée par :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}_k). \quad (\text{B.22})$$

En pratique, le calcul de \mathbf{J}^{-1} nécessite $\mathcal{O}(n^4)$ opérations où n désigne la taille de la matrice \mathbf{J} suivant l'une de ses directions. L'algorithme est arrêté par un critère de sortie $\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\| < G$, avec G une précision arbitraire (fixée dans notre cas à 10^{-10}).

Dichotomie 2D

Le second algorithme utilisé pour déterminer les points fixes/périodiques est une dichotomie étendue à deux dimensions. Cet algorithme consiste en 7 étapes exprimées comme :

1. Choix d'une condition initiale \mathbf{X}_0 .
2. Considérer un carré de taille $2d$ centré sur \mathbf{X}_0 dont les côtés sont parallèles aux axes X et Z . Les points du carré sont nommés $\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, 8$ et correspondent aux coins et au milieu de chaque face du carré.
3. Évaluer le déplacement $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}(\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_i(t + \delta t) - \mathbf{X}_i(t)$ pour tous les points $\mathbf{X}_i, i = 0, \dots, 8$ en avançant chacun des points d'un pas de temps δt .
4. Choisir le point \mathbf{X}_k pour lequel chacune des composantes de \mathbf{g}_k est opposée au signe de \mathbf{g}_0 et pour lequel $|\mathbf{g}_k|^2$ est minimal. Si un tel point est identifié, passer à l'étape (5). Sinon, choisir le point où $|\mathbf{g}_k|^2$ est minimal et définir $\mathbf{X}_b = (\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_0)/2$ puis reprendre à l'étape (2).
5. Définir un nouveau point $\mathbf{X}_b = (\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_0)/2$.
6. Si $|\mathbf{g}(\mathbf{X}_b)| < G$, avec G la précision souhaitée, un point fixe/périodique a été identifié. Sinon,
7. Mettre à jour $d = \|\mathbf{X}_b - \mathbf{X}_0\|_\infty$, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_b$ et reprendre à l'étape (2)

Dans le cas optimal, la précision de l'évaluation du point fixe/périodique est augmentée d'un facteur 2 à chaque itération. En partant d'une convergence initiale de l'ordre de 1, un point fixe/périodique est idéalement identifié avec une précision de 10^{-10} en 34 itérations. La convergence de l'algorithme est illustrée sur la figure B.6 pour un point fixe du champ stationnaire (instable) de l'écoulement de cavité différentiellement chauffée 2D à $Ra = 1.625 \times 10^8$. Cet algorithme géométrique peut se montrer plus efficace que la méthode de Newton pour identifier les points fixes de l'écoulement stationnaire. Initialement développé dans ce cas précis, son extension au cas des orbites périodiques instables est réalisable dans la section stroboscopique II (voir annexe B.1). Cet algorithme a été testé et validé dans le cas de la recherche d'orbites périodiques instables du système de Lorenz chaotique au cours d'un stage de L3 réalisé par M^{me} Emmanuelle Tsigaridis au LIMSI, en janvier 2013.

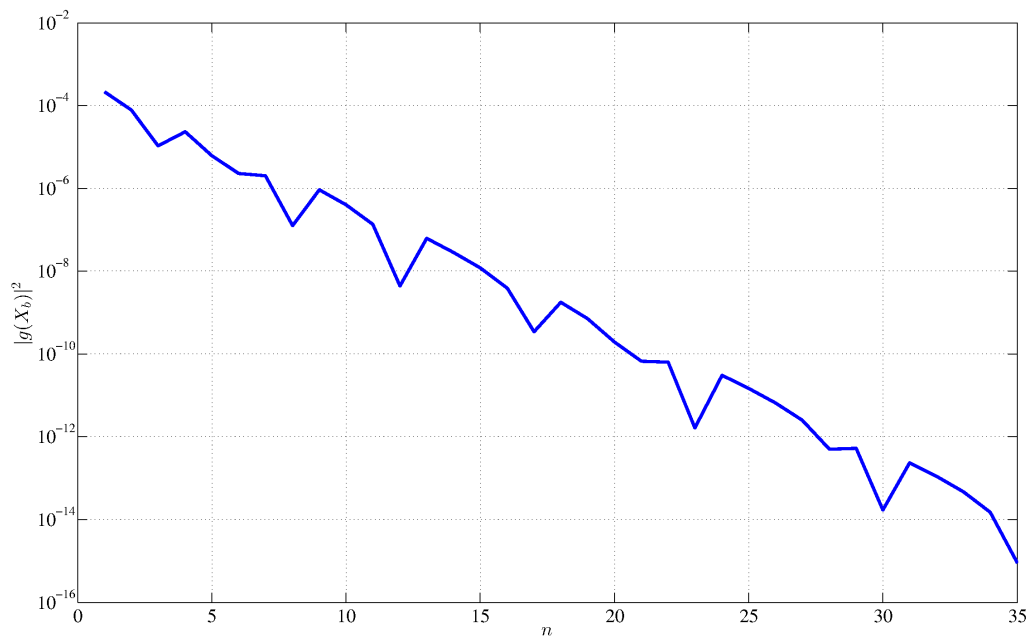


FIGURE B.6 – Convergence de l’algorithme de dichotomie $2D$ sur un point fixe de l’écoulement de cavité différentiellement chauffée stationnaire (instable) à $Ra = 1.625 \times 10^8$. ([Retour au texte](#))

